

中2数学C 2019年度1学期 宿題解答

§3 完全平方形

H3.1

$$(1) \quad (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{10} + 2 = \boxed{7 + 2\sqrt{10}}$$

$$(2) \quad (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{10} + 2 = \boxed{7 - 2\sqrt{10}}$$

$$(3) \quad (3\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2})^2 + 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 9 \times 2 + 6\sqrt{6} + 3 = \boxed{21 + 6\sqrt{6}}$$

$$(4) \quad (2 - \sqrt{5})^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = \boxed{9 - 4\sqrt{5}}$$

H3.2

二重根号が外れて、

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

と表せるとする。左辺は正の数を表しているので、 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ も正の数であり、

$$a > b \dots\dots\dots \star$$

であることに注意する。

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

なので、

$$\begin{aligned} \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} &= \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} \\ &= \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} \end{aligned}$$

$$\therefore 7 - 2\sqrt{10} = a + b - 2\sqrt{ab}$$

が成り立つ。そこで、

掛けて 10 足して 7

となる2数 a, b を探してみると、5と2が見つかる。よって、 $\star$ に注意して、

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{5} - \sqrt{2} = 2.2360 - 1.4142 \dots = \boxed{0.82} \dots$$

H3.3

自然数 N の下 2 桁が 25 だから、

$$N = 100x + 25 \quad (x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表せる。これより、

$$\begin{aligned} N^2 &= (100x + 25)^2 \\ &= (100x)^2 + 2 \times 100x \times 25 + 25^2 \\ &= 10000x^2 + 5000x + 625 \end{aligned}$$

となる。

$$(1) \quad N^2 = 10000x^2 + 5000x + 625 = 1000(10x^2 + 5x) + 625$$

ここで、 x は 0 以上の整数なので、 $1000(10x^2 + 5x)$ は 0 以上の整数であり、1000 の倍数であるから下 3 桁は 000 となっている。

したがって、 N^2 の下 3 桁は $000 + 625 = 625$ である。

$$(2) \quad N^2 \text{ の千の位の数} \text{は、(1)より、} 1000(10x^2 + 5x) \text{ の千の位の数で決まり、これは}$$

$$\underbrace{10x^2}_{\text{一の位の数}0} + 5x$$

の一の位の数に他ならない。 x は 0 以上の整数なので、 $10x^2, 5x$ は 0 以上の整数であり、 $10x^2$ の一の位数は 0 なので、 $10x^2 + 5x$ の一の位数は $5x$ の一の位の数と一致する。これは x が偶数なら 0、奇数なら 5 である。

したがって、 N^2 の千の位の数としてありうるものは、 $\boxed{0, 5}$ である。

H3.4

(1) 3 つとも正の数なので 2 乗しても大小関係は変わらない。

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

$$(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4,$$

$$\left(\sqrt{n^2 + 4n}\right)^2 = n^2 + 4n = (n^2 + 2n) + 2n$$

で、 $n \geq 1$ だから、

$$(n+1)^2 < \left(\sqrt{n^2 + 4n}\right)^2 < (n+2)^2$$

である。したがって、

$$\boxed{n+1 < \sqrt{n^2 + 4n} < n+2}$$

(2) (1)より、 $\sqrt{n^2 + 4n} = \sqrt{n(n+4)}$ は、連続する 2 つの自然数の間にあるので整数ではない。ゆえに、差が 4 の自然数の積の正の平方根 $\sqrt{1 \times 5}, \sqrt{2 \times 6}, \sqrt{3 \times 7}, \dots$ の中に整数になるものはない。

H3.5

- (1) $144_{(5)} = 1 \times 5^2 + 4 \times 5 + 4 \times 1 = \boxed{49}$, $144_{(6)} = 1 \times 6^2 + 4 \times 6 + 4 \times 1 = \boxed{64}$
 $144_{(7)} = 1 \times 7^2 + 4 \times 7 + 4 \times 1 = \boxed{81}$, $144_{(8)} = 1 \times 8^2 + 4 \times 8 + 4 \times 1 = \boxed{100}$
 でいずれも平方数になっている。

- (2) $144_{(n)} = 1 \times n^2 + 4 \times n + 4 \times 1 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$
 なので、 $144_{(n)}$ は $n (\geq 5)$ にらず、平方数であることが分かる。

H3.6

- (1) $3^2 = 9 < 13 < 16 = 4^2$ より、 $3 < \sqrt{13} < 4$ だから、 $\sqrt{13}$ の小数部分は $\sqrt{13} - 3$ である。

$$\text{よって、} a_1 = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = \boxed{\frac{\sqrt{13} + 3}{4}}$$

- (2) $3 < \sqrt{13} < 4$ より、

$$1 < \frac{3+3}{4} < a_1 < \frac{4+3}{4} < 2$$

だから、 a_1 の小数部分は $a_1 - 1 = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} - 1 = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$ である。よって、

$$a_2 = \frac{4}{\sqrt{13} - 1} = \frac{4(\sqrt{13} + 1)}{(\sqrt{13})^2 - 1^2} = \frac{\cancel{4}(\sqrt{13} + 1)}{\cancel{3}2} = \boxed{\frac{\sqrt{13} + 1}{3}}$$

- (3) $3 < \sqrt{13} < 4$ より、

$$1 < \frac{3+1}{3} < a_2 < \frac{4+1}{3} < 2$$

だから、 a_2 の小数部分は $a_2 - 1 = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} - 1 = \frac{\sqrt{13} - 2}{3}$ である。よって、

$$a_3 = \frac{3}{\sqrt{13} - 2} = \frac{3(\sqrt{13} + 2)}{(\sqrt{13})^2 - 2^2} = \frac{\cancel{3}(\sqrt{13} + 2)}{\cancel{3}\cancel{3}} = \frac{\sqrt{13} + 2}{3}$$

ここで、 $3 < \sqrt{13} < 4$ より、

$$1 < \frac{3+2}{3} < a_3 < \frac{4+2}{3} = 2$$

だから、 a_3 の小数部分は $a_3 - 1 = \frac{\sqrt{13} + 2}{3} - 1 = \frac{\sqrt{13} - 1}{3}$ である。よって、

$$a_4 = \frac{3}{\sqrt{13}-1} = \frac{3(\sqrt{13}+1)}{(\sqrt{13})^2-1^2} = \frac{\cancel{3}(\sqrt{13}+1)}{\cancel{4}\cancel{12}} = \frac{\sqrt{13}+1}{4}$$

再び $3 < \sqrt{13} < 4$ より、

$$1 = \frac{3+1}{4} < a_4 < \frac{4+1}{4} < 2$$

だから、 a_4 の小数部分は $a_4 - 1 = \frac{\sqrt{13}+1}{4} - 1 = \frac{\sqrt{13}-3}{4}$ である。よって、

$$a_5 = \frac{4}{\sqrt{13}-3} = \frac{4(\sqrt{13}+3)}{(\sqrt{13})^2-3^2} = \frac{\cancel{4}(\sqrt{13}+3)}{\cancel{4}} = \sqrt{13}+3$$

再び $3 < \sqrt{13} < 4$ より、

$$6 = 3+3 < a_5 < 4+3 = 7$$

だから、 a_5 の小数部分は $a_5 - 6 = \sqrt{13}+3-6 = \sqrt{13}-3$ で、これは $\sqrt{13}$ の小数部分と同じである。よって、

$$a_6 = a_1 = \boxed{\frac{\sqrt{13}+3}{4}}$$

- (4) $a_6 = a_1$ だから、以下 $a_7 = a_2, a_8 = a_3, a_9 = a_4, a_{10} = a_5, a_{11} = a_6 = a_1, a_{12} = a_7 = a_2, \dots$ と、 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 と同じ値を周期 5 で繰り返していく。したがって、

$$a_{100} = a_5 = \boxed{\sqrt{13}+3}$$