

中2数学X 2019年度1学期 本問解答

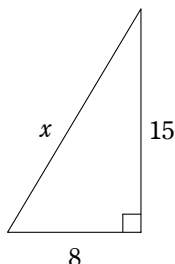
§4 ピタゴラスの定理の応用

※ 欠席してしまった場合は、問4.1～問4.4を（余裕があれば問4.5, 問4.6も）自分で確認し、p.26 宿題 H4.1～H4.3に取り組んで提出してください。

問4.1

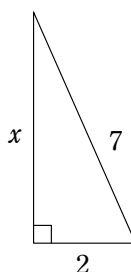
- (1) ピタゴラスの定理より、

$$\begin{aligned}x^2 &= 8^2 + 15^2 \\&= 64 + 225 = 289 = 17^2 \\ \text{よって、} x > 0 \text{ より、} x &= \boxed{17}\end{aligned}$$



- (2) ピタゴラスの定理より、

$$\begin{aligned}x^2 + 2^2 &= 7^2 \\x^2 &= 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45 \left[= 3^2 \times 5 \right] \\ \text{よって、} x > 0 \text{ より、} x &= \boxed{3\sqrt{5}}\end{aligned}$$



問4.2

- (1) $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形なので、A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、 $BH = CH = 3$ となる。

$\triangle ABH$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned}7^2 &= 3^2 + AH^2 \\AH^2 &= 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40, \\ \therefore AH &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad (AH > 0 \text{ より})\end{aligned}$$

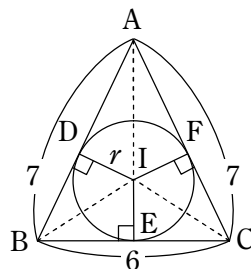
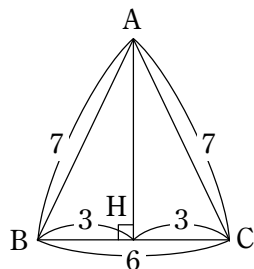
したがって、

$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{10} = \boxed{6\sqrt{10}}$$

内接円の中心（内心）を I とし、内接円と辺 AB, BC, CA との接点をそれぞれ D, E, F とすると、内接円の半径 ID, IE, IF は辺 AB, BC, CA と垂直になる。したがって、内接円の半径を r とすると、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\triangle ABC = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \times AB \times ID + \frac{1}{2} \times BC \times IE + \frac{1}{2} \times CA \times IF \\&= \frac{7r}{2} + \frac{6r}{2} + \frac{7r}{2} = \frac{(7+6+7)r}{2} = \frac{20r}{2} = 10r\end{aligned}$$



と表せる。よって、

$$10r = 6\sqrt{10}$$

$$\therefore r = 6\sqrt{10} \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{5}}$$

- (2) 点 A, D から底辺 BC に下した垂線の足をそれぞれ H, I とし、 $AH = x$ とおく。
 $\triangle ABH \equiv \triangle DCI$ (斜辺一辺相等) より $BH = CI$ なので、
 $BH = CI = \frac{BC - HI}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2$ となる。

$\triangle ABH$ にピタゴラスの定理を用いて、

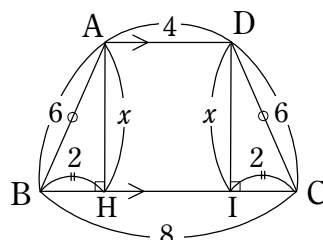
$$x^2 + 2^2 = 6^2$$

$$x^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$$

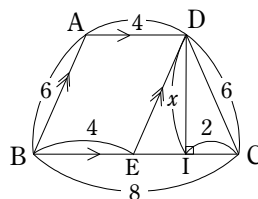
$$x > 0 \text{ より、} x = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{よって、台形 ABCD の面積} = \frac{1}{2} \times (AD + BC) \times AH$$

$$= \frac{1}{2} \times (4 + 8) \times 4\sqrt{2} = \boxed{24\sqrt{2}}$$



- (別方針) 右図のように、D から AB に平行な直線を引いて考える方法もある。



問4.3

AC = BC = 1 の直角二等辺三角形 ABC の斜辺 AB の長さは、
ピタゴラスの定理より、

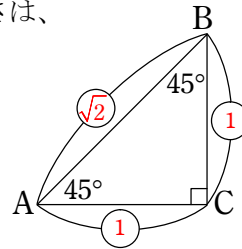
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore AB = \sqrt{2} \quad (AB > 0 \text{ なので})$$

となり、3 辺の長さは右図のようになる。

すべての直角二等辺三角形は△ABC と相似なので、
3 辺の長さの比は右図の△ABC と同じになり、

1:1:√2 である。



∠A = 60°, ∠B = 30°, ∠C = 90° で、AB = 2 の直角三角形 ABC は、
正三角形 ABD の半分になっていて、AC = CD = 1 である。

△ABC にピタゴラスの定理を用いて、

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$2^2 = 1^2 + BC^2 \quad BC^2 = 4 - 1 = 3$$

$$\therefore BC = \sqrt{3} \quad (BC > 0 \text{ より})$$

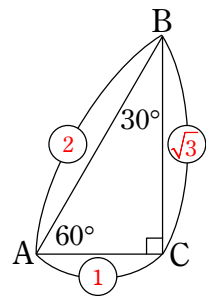
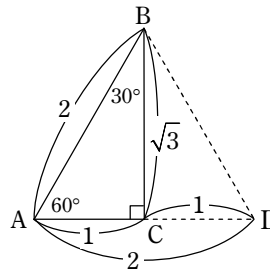
となり、3 辺の長さは右図のようになる。

30°, 60°, 90° の三角定規の形の直角三角形は、

すべて△ABC と相似なので、

3 辺の長さの比は右図の△ABC と同じになり、

1:√3:2 である。



問4.4

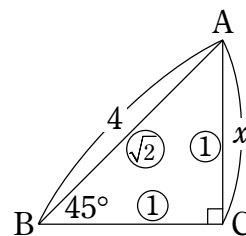
(1) △ABC は直角二等辺三角形なので、3 辺の比は

$$AC : BC : AB = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

である。

よって、 $4 : x = \sqrt{2} : 1$ より、

$$x = 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

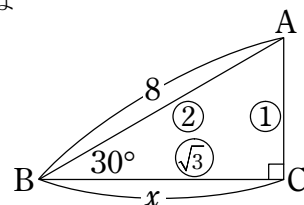


(2) △ABC は 30°, 60°, 90° の直角三角形なので、3 辺の比は

$$AC : BC : AB = 1 : \sqrt{3} : 2$$

である。

$$\text{よって、} 8 : x = 2 : \sqrt{3} \text{ より、} x = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$



- (3) $\triangle BDC$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので、3 辺の比は

$$CD:BC:BD=1:\sqrt{3}:2$$

である。

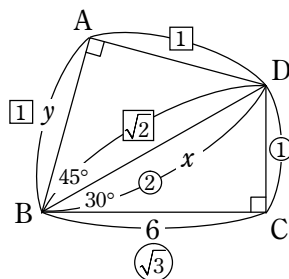
$$\text{よって、 } 6:x=\sqrt{3}:2 \text{ より、 } x=6 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \cancel{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{\cancel{3}_1} = \boxed{4\sqrt{3}}$$

次に、 $\triangle ABD$ は直角二等辺三角形なので、3 辺の比は

$$BA:AD:BD=1:1:\sqrt{2}$$

である。

$$\text{よって、 } x:y=\sqrt{2}:1 \text{ より、 } y=\frac{1}{\sqrt{2}}x=\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} \times \cancel{4}_2 \sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{6}}$$



- (4) A から BC に下した垂線の足を H とする。

$\triangle ABH$ は直角二等辺三角形なので、3 辺の比は

$$AH:BH:AB=1:1:\sqrt{2}$$

また、

$\triangle ACH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので、3 辺の比は

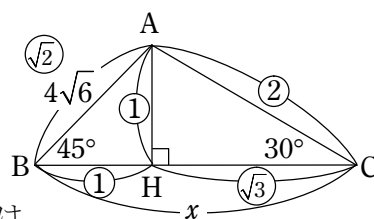
$$AC:AH:HC=2:1:\sqrt{3}$$

となっている。よって、

$$AB:BC=AB:(BH+HC)=\sqrt{2}:(1+\sqrt{3})$$

なので、

$$\begin{aligned} x=BC &= \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times AB \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}_1} \times 4 \cancel{\sqrt{6}}^{\sqrt{3}} \quad (\because \sqrt{6}=\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \\ &= (1+\sqrt{3}) \times 4\sqrt{3} \\ &= \boxed{4\sqrt{3}+12} \end{aligned}$$



- (5) A から BC に下した垂線の足を H とすると、
 $\triangle ABH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので、3 辺の比は

$$AB : BH : HA = 2 : 1 : \sqrt{3}$$

よって、 $AB = 4$ より、

$$BH = AB \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$AH = BH \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

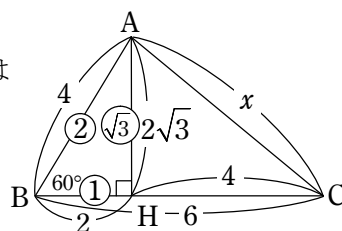
$$CH = BC - BH = 6 - 2 = 4$$

と求まる。

すると、 $\triangle ACH$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2 = AC^2 = 4^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16 + 12 = 28$$

よって、 $x > 0$ より、 $x = \sqrt{28} = \boxed{2\sqrt{7}}$



問4.5

- (1) A4 判の対角線の長さと B4 判の長い方の辺の長さが同じになる。

- (2) (1)で述べた関係は、A0 判と B0 判についても同じである。また、問 1.11 でみたように、コピー用紙の長い方の辺と短い方の辺の比は $\sqrt{2} : 1$ (これは A 判でも B 判でも同様) である。

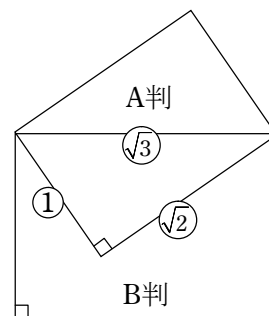
よって、A0 判の短い方の辺を x とおくと、長い方の

辺は $\sqrt{2}x$ で、右図の A 判, B 判の重なりの直角三角形にピタゴラスの定理を用いれば、B0 判の長い方の辺は

$$\sqrt{x^2 + (\sqrt{2}x)^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

となる。したがって、A0 判と B0 判の相似比は $\sqrt{2}x : \sqrt{3}x = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ である。

これより面積比は $2 : 3$ と分かるから、B0 判の面積は A0 判の面積の 1.5 倍で、 $\boxed{1.5\text{m}^2}$ である。



問4.6

1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC において、
A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、

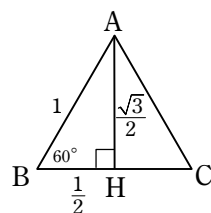
$$AH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ となり、}$$

求める面積は、

$$\frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

これを小数第 2 位まで求めると、 $\sqrt{3} = 1.732\cdots$ なので、

$$\frac{1.732\cdots}{4} = \boxed{0.43}\cdots$$



1 辺の長さが 1 の正八角形 ABCDEFGH は、
右図のように対角線の交点を I, J, K, L とおくと、
直角二等辺三角形 BCJ が 4 つ分と、長方形 ABJI が
4 つ分と、正方形 IJKL が 1 つ分に分けられる。
よって、

$$\begin{aligned} & 4 \times \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \frac{1}{2} \right\} + 4 \times \left(1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 1 = 2 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

これを小数第 2 位まで求めると、 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$ なので、

$$2 + 2 \times 1.414\cdots = \boxed{4.82}\cdots$$

