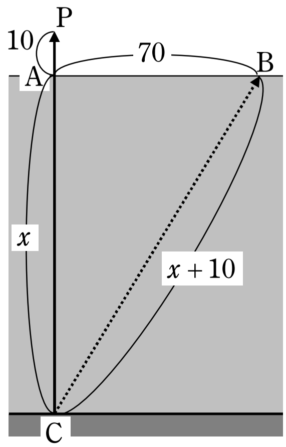
中2数学B 2019年度1学期　本問解答
§８　ピタゴラスの定理と計量

※　欠席してしまった場合は、問 8.1, 問 8.3 を（余裕があれば問 8.4 も）自分で確認し、p.11 の宿題 H8.1〜H8.3 に取り組んで提出してください。

問8.1



$AC = x$ とおく。

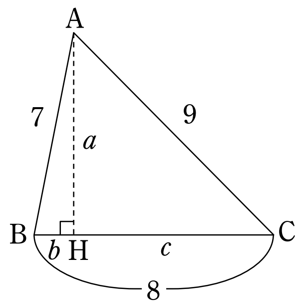
$BC = PC = AC + AP = x + 10,\ AB = 70,\ \angle BAC = 90^\circ$

なので、$\triangle ABC$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$(x+10)^2 = x^2 + 70^2$$
$$\cancel{x^2} + 20x + 100 = \cancel{x^2} + 4900$$
$$20x = 4900 - 100 = 4800$$
$$\therefore\ x = 4800 \times \frac{1}{20} = 240$$

よって、堀の水深は $\boxed{240\text{cm}}$

問8.2



$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7^2 & (\triangle ABH にピタゴラスの定理) \cdots\cdots ① \\ a^2 + c^2 = 9^2 & (\triangle ACH にピタゴラスの定理) \cdots\cdots ② \\ b + c = 8 & (BC = 8) \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①－② より、$b^2 - c^2 = 7^2 - 9^2 \cdots\cdots ④$

（方針Ｉ）

③より、$c = 8 - b \cdots\cdots$ ☆ なので、

④に☆を代入して、

$$b^2 - (8-b)^2 = 7^2 - 9^2$$
$$b^2 - (64 - 16b + b^2) = (7+9)(7-9)$$
$$\cancel{b^2} - 64 + 16b - \cancel{b^2} = 16 \times (-2)$$
$$16b = -32 + 64 = 32 \qquad \therefore b = 2$$

（方針 II）

④より、$(b+c)(b-c) = (7+9)(7-9)$

③を代入して、$8(b-c) = 16 \times (-2)$

両辺を 8 で割って、$b - c = -4 \quad \cdots\cdots ⑤$

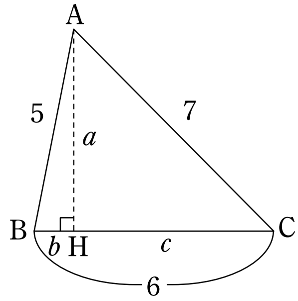
$$\begin{cases} b + c = 8 & \cdots\cdots ③ \\ b - c = -4 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

③＋⑤ より、$2b = 4 \quad \therefore b = 2$

①に代入して、$a^2 + 2^2 = 7^2 \quad a^2 = 49 - 4 = 45$

$a > 0$ より、$AH = a = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}}$，$BH = b = \boxed{2}$，$CH = c = 8 - b = \boxed{6}$

問8.3



(1)　$\mathrm{AH}=a,\mathrm{BH}=b,\mathrm{CH}=c$ とおく。

$$\begin{cases} a^2+b^2=5^2 & (\triangle\text{ABHにピタゴラスの定理}) \cdots\cdots ① \\ a^2+c^2=7^2 & (\triangle\text{ACHにピタゴラスの定理}) \cdots\cdots ② \\ b+c=6 & (\mathrm{BC}=6) \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①－② より、$b^2-c^2=5^2-7^2$ ……④

（方針Ⅰ）

③より、$c=6-b$ ……☆ なので、

④に☆を代入して、

$b^2-(6-b)^2=5^2-7^2$

$b^2-(36-12b+b^2)=(5+7)(5-7)$

$\cancel{b^2}-36+12b-\cancel{b^2}=12\times(-2)$

$12b=-24+36=12$　　$\therefore b=1$

（よって、BH=1）

（方針Ⅱ）

④より、$(b+c)(b-c)=(5+7)(5-7)$

③を代入して、$6(b-c)=12\times(-2)$

両辺を6で割って、$b-c=-4$　……⑤

$$\begin{cases} b+c=6 & \cdots\cdots ③ \\ b-c=-4 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

③＋⑤ より、$2b=2$　$\therefore b=1$

（よって、BH=1）

①に代入して、$a^2+1^2=5^2$　$a^2=25-1=24$

$a>0$ より、$\mathrm{AH}=a=\sqrt{24}=\boxed{2\sqrt{6}}$

(2)　(i)　(1)より、$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{AH}=\dfrac{1}{2}\times6\times2\sqrt{6}=\boxed{6\sqrt{6}}$

(ii)　$\triangle$ABC の内接円の半径を r とおき、内心を I とおく。

$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{IAB}+\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}$ より、

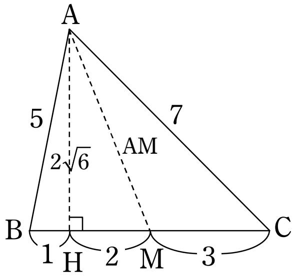
$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})\times r$ なので、

(i)より、$6\sqrt{6}=\dfrac{1}{2}\times(5+6+7)\times r$

$9r=6\sqrt{6}$

$\therefore\ r=\dfrac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{6}}{\underset{3}{\cancel{9}}}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$

(3) (i) MはBCの中点なので、$BM=CM=\frac{BC}{2}=\frac{6}{2}=3$



よって、$HM=BM-BH=3-1=2$

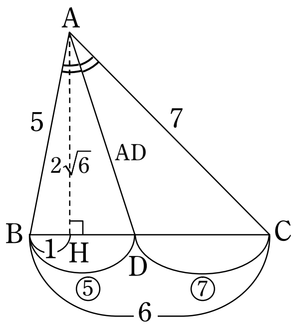
$\triangle$AHMにピタゴラスの定理を用いて、

$AM^2=AH^2+HM^2=\left(2\sqrt{6}\right)^2+2^2=24+4=28$

$AM>0$より、$AM=\sqrt{28}=\boxed{2\sqrt{7}}$

(ii) ADは$\angle$BACの2等分線なので、

$BD:DC=AB:AC=5:7$



よって、$BD=BC\times\frac{BD}{BD+DC}=6\times\frac{5}{5+7}=\frac{5}{2}$

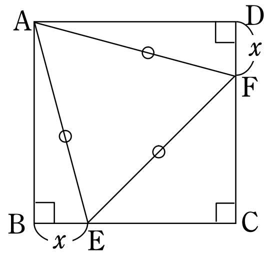
$HD=BD-BH=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$

$\triangle$AHDにピタゴラスの定理を用いて、

$AD^2=AH^2+HD^2=\left(2\sqrt{6}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=24+\frac{9}{4}=\frac{105}{4}$

$AD>0$より、$AD=\sqrt{\frac{105}{4}}=\boxed{\frac{\sqrt{105}}{2}}$

問8.4



斜辺一辺相等で$\triangle \mathrm{ABE} \equiv \triangle \mathrm{ADF}$だから、

$$\mathrm{BE} = \mathrm{DF} = x$$

とおける。

直角三角形 ABE にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{AE}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BE}^2 = 1 + x^2$$

$\mathrm{CE} = \mathrm{CF} = 1 - x$となるから、$\triangle \mathrm{CEF}$は直角二等辺三角形で、

$$\mathrm{EF} = \sqrt{2}\,\mathrm{CE} = \sqrt{2}(1-x), \quad \therefore \mathrm{EF}^2 = 2(1-x)^2 = 2(x-1)^2$$

$\triangle \mathrm{AEF}$が正三角形であることより、$\mathrm{AE}^2 = \mathrm{EF}^2$だから、

$$1 + x^2 = 2(x-1)^2$$

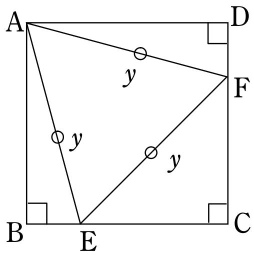
が成り立つ。これを解くと、

$$1 + x^2 = 2x^2 - 4x + 2$$
$$x^2 - 4x = -1$$
$$x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$
$$(x-2)^2 = 3$$
$$x - 2 = \sqrt{3}, -\sqrt{3}$$

よって、$x = 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$ を得る。ここで、$x = \mathrm{BE}$より、$0 < x < 1$であるが、$1 < \sqrt{3} < 2$だから、これをみたすのは $x = 2 - \sqrt{3}$ の方だけである。このとき、$\triangle \mathrm{AEF}$ の一辺の長さは、

$$\mathrm{EF} = \sqrt{2}\left(1 - x\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) = \boxed{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

別解　求める△AEF の一辺の長さを文字で（例えば y と）おいた場合次のようになる。



直角三角形 ABE にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{BE}^2=\mathrm{AE}^2-\mathrm{AB}^2=y^2-1,\quad \mathrm{BE}=\sqrt{y^2-1}$$

△CEF は直角二等辺三角形だから、

$$\mathrm{CE}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{EF}=\frac{1}{\sqrt{2}}y=\frac{\sqrt{2}}{2}y$$

$\mathrm{BE}+\mathrm{CE}=\mathrm{BC}=1$ だから、

$$\sqrt{y^2-1}+\frac{\sqrt{2}}{2}y=1$$

が成り立つ。これを解くために、$\frac{\sqrt{2}}{2}y$ を移項してから両辺を2乗する。

$$\left(\sqrt{y^2-1}\right)^2=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2,\qquad y^2-1=1-\sqrt{2}\,y+\frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{4}_{\,2}}y^2,\qquad \frac{1}{2}y^2+\sqrt{2}\,y=2$$

両辺 2 倍して $y^2+2\sqrt{2}y=4$ となるので、これを平方完成して解くと、

$$y^2+2\sqrt{2}\,y+\sqrt{2}^2=4+\sqrt{2}^2$$

$$\left(y+\sqrt{2}\right)^2=6$$

$$y+\sqrt{2}=\sqrt{6},-\sqrt{6}$$

$$\therefore\ y=\sqrt{6}-\sqrt{2},\ -\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$y>0$　であるが、2 つの解のうち、これをみたすのは　$y=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ の方である。また、$y=\mathrm{EF}$ は対角線 BD より短いので、y は $y<\sqrt{2}$ も満たさなくてはならないが、

$$\sqrt{2}-y=\sqrt{2}-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-\sqrt{6}=\sqrt{8}-\sqrt{6}>0$$

より、$y<\sqrt{2}$ である。 したがって、△AEF の一辺の長さは $y=\boxed{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$