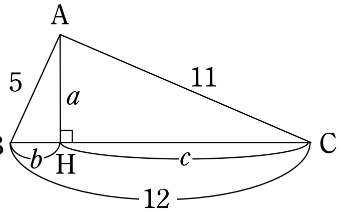
中2数学B　2019年度1学期　宿題解答
§8　ピタゴラスの定理と計量

H8.1

(1)　AH $=a$, BH $=b$, CH $=c$ とおく。

$$\begin{cases} a^2+b^2=5^2 & (\triangle\text{ABHにピタゴラスの定理}) \cdots\cdots ① \\ a^2+c^2=11^2 & (\triangle\text{ACHにピタゴラスの定理}) \cdots\cdots ② \\ b+c=12 & (\text{BC}=12) \cdots\cdots ③ \end{cases}$$



①−② より、$b^2-c^2=5^2-11^2$

$(b+c)(b-c)=(5+11)(5-11)$

③を代入して、

$12(b-c)=16\times(-6)$

両辺を12で割って、$b-c=-8$　……④

$$\begin{cases} b+c=12 \cdots\cdots ③ \\ b-c=-8 \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③＋④ より、$2b=4$　$\therefore b=2$（よって、BH=2）

①に代入して、$a^2+2^2=5^2$　$a^2=25-4=21$

$a>0$ より、AH $=a=\boxed{\sqrt{21}}$

(2)　(1)より、$\triangle\text{ABC}=\frac{1}{2}\times\text{BC}\times\text{AH}=\frac{1}{2}\times12\times\sqrt{21}=\boxed{6\sqrt{21}}$

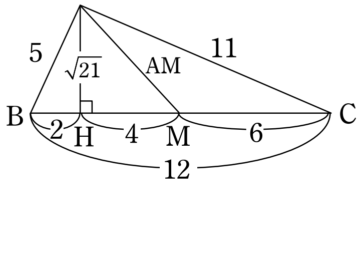
(3)　$\triangle$ABC の内接円の半径を r とおき、内心を I とおく。

$\triangle\text{ABC}=\triangle\text{IAB}+\triangle\text{IBC}+\triangle\text{ICA}$ より、$\triangle\text{ABC}=\frac{1}{2}\times(\text{AB}+\text{BC}+\text{CA})\times r$ なので、

(2)より、$6\sqrt{21}=\frac{1}{2}\times(5+12+11)\times r$　$14r=6\sqrt{21}$

$$\therefore\quad r=\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\sqrt{21}}{\underset{7}{\cancel{14}}}=\boxed{\frac{3\sqrt{21}}{7}}$$

(4)　M は BC の中点なので、$\text{BM}=\text{CM}=\frac{\text{BC}}{2}=\frac{12}{2}=6$



よって、$\text{HM}=\text{BM}-\text{BH}=6-b=6-2=4$

$\triangle$AHM にピタゴラスの定理を用いて、

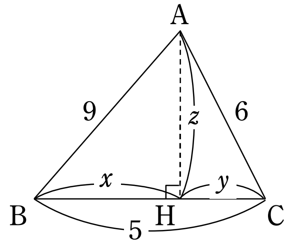
$\text{AM}^2=\text{AH}^2+\text{HM}^2=\sqrt{21}^2+4^2=21+16=37$

AM>0 より、AM $=\boxed{\sqrt{37}}$

H8.2

(1) $BH = x, HC = y, AH = z$ とおく。

まず、右図のように、H が辺 BC 上にあるものとして考えてみる。



$BC = 5$ だから、

$x + y = 5$ ……①

△ABH にピタゴラスの定理を用いて、

$x^2 + z^2 = 9^2$ ……②

△ACH にピタゴラスの定理を用いて、

$y^2 + z^2 = 6^2$ ……③

②−③ より、

$x^2 - y^2 = 9^2 - 6^2$

$(x + y)(x - y) = (9 + 6)(9 - 6)$ …④

①を代入して、

$5(x - y) = 15 \times 3$

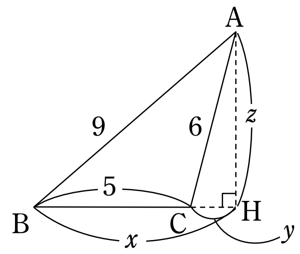
$\therefore\ x - y = 9$ ……⑤

①+④ より、

$2x = 14,\ \ \therefore x = 7$

ところが、この x の値は辺 BC の長さ 5 よりも長いので不適切である。

そこで、改めて、右図のように H が BC の延長上にあるものとすると、



$BC = 5$ だから、

$x - y = 5$ ……⑥

この場合でも、まったく同様に②, ③が成り立ち、結果④が得られるので、⑥を代入すると、

$(x + y) \times 5 = 15 \times 3$

$\therefore\ x + y = 9$ ……⑦

⑥+⑦ より、

$2x = 14,\ \ \therefore x = 7$

と先ほどと同じ値が得られる。今度は x の値が辺 BC の長さ 5 よりも長いので、これは答として適切。よって、 $BH = \boxed{7}$ である。

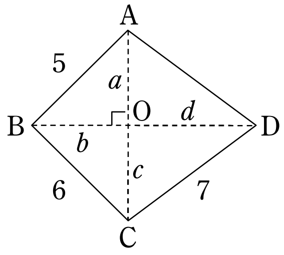
(2) (1)で計算して分かった通り、A から BC に下した垂線の足は、BC の C 側の延長上にある。

したがって、△ABC は、

$\boxed{\text{∠Cが鈍角の鈍角三角形}}$

になっている。

H8.3



AC と BD の交点を O とおいて、

$\mathrm{OA}=a, \mathrm{OB}=b, \mathrm{OC}=c, \mathrm{OD}=d$

とする。

△OAB, △OBC, △OCD それぞれに

ピタゴラスの定理を用いて、

$a^2+b^2=5^2$ ……………………………①

$b^2+c^2=6^2$ ……………………………②

$c^2+d^2=7^2$ ……………………………③

求めたい DA の長さについては、△ODA にピタゴラスの定理を用いて、

$\mathrm{DA}^2=a^2+d^2$ ……………………………④

となっている。そこで、a^2+d^2 を計算すると、①－②＋③ より、

$$\begin{aligned} a^2+d^2 &= (a^2+b^2)-(b^2+c^2)+(c^2+d^2) \\ &= 25-36+49 \\ &= 38 \end{aligned}$$

よって、④より

$\mathrm{DA}^2=38$

$\therefore \mathrm{DA}=\boxed{\sqrt{38}}\ (>0)$