中2数学B　2019年1学期　宿題解答
§11　2点間の距離

H11.1

(1)　A$(1,3)$ から B$(4,7)$ までの移動は、

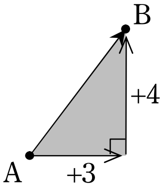
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

なので、ピタゴラスの定理より、

$$\mathrm{AB} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

また、AB の傾きは、

$$\frac{(y\text{方向の移動量})}{(x\text{方向の移動量})} = \boxed{\frac{4}{3}}$$



(2)　A$(-3,1)$ から B$(1,-5)$ までの移動は、

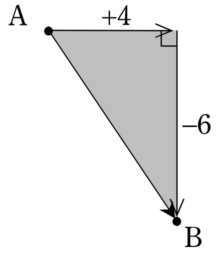
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

なので、

$$\mathrm{AB} = \sqrt{4^2+|-6|^2} = \sqrt{4^2+6^2} \ \left(= \sqrt{4^2+(-6)^2}\right) = \sqrt{52} = \boxed{2\sqrt{13}}$$

また、AB の傾きは、

$$\frac{-6}{4} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$



(3)　A(a,c) から B(b,d) までの移動は、

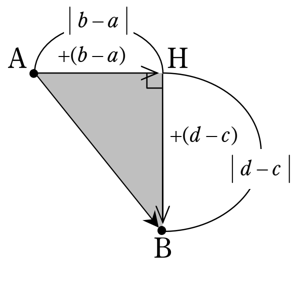
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b-a \\ d-c \end{pmatrix}$$

なので、

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\left(|\,b-a\,|\right)^2+\left(|\,d-c\,|\right)^2} = \boxed{\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}}$$

また、$a \neq b$　より $b-a \neq 0$ に注意して、AB の傾きは、

$$\boxed{\frac{d-c}{b-a}}$$



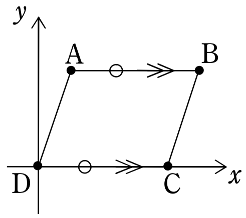
H11.2

D を原点とし、直線 DC に沿って x 軸を、それに垂直に y 軸を設定する。

A, C の座標をそれぞれ、

$$A(a,b),\ C(c,0)$$

とおく。



辺 AB は辺 OC と平行で長さが等しい、つまり A から B への移動は O から C への移動$\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$と一致するから、B の座標は

$$(a+c, b+0) = (a+c, b)$$

となる。

このとき、4 辺の長さの 2 乗の和は、

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 + \mathrm{DA}^2 &= 2(\mathrm{DA}^2 + \mathrm{DC}^2) \\ &= 2\left\{(a^2 + b^2) + c^2\right\} \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

となる。一方、対角線の長さの 2 乗の和は、

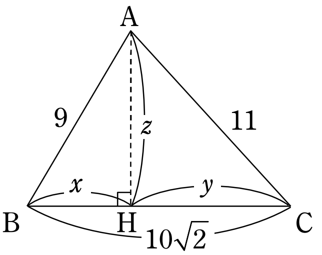
$$\begin{aligned} \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 &= \{(c-a)^2 + (0-b)^2\} + \{(a+c)^2 + b^2\} \\ &= (a^2 - 2ac + c^2 + b^2) + (a^2 + 2ac + c^2 + b^2) \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 + \mathrm{DA}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2$$

が成り立つことが示された。

H11.3



まず、BC を底辺と見たときの高さを求めよう。

$\mathrm{BH}=x, \mathrm{HC}=y, \mathrm{AH}=z$ とする。

$\mathrm{BC}=10\sqrt{2}$ だから、

$$x+y=10\sqrt{2} \cdots\cdots ①$$

△ABH にピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2+z^2=9^2 \cdots\cdots ②$$

△ACH にピタゴラスの定理を用いて、

$$y^2+z^2=11^2 \cdots\cdots ③$$

② − ③ より、

$$x^2-y^2=9^2-11^2$$

$$(x+y)(x-y)=(9+11)(9-11)$$

①を代入して、

$$10\sqrt{2}(x-y)=20\times(-2)$$

$$x-y=\frac{-\overset{4}{\cancel{40}}}{\underset{1}{\cancel{10}}\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ x-y=-2\sqrt{2} \cdots\cdots ④$$

① + ④ より、

$$2x=8\sqrt{2},\quad \therefore x=4\sqrt{2}$$

① − ④ より、

$$2y=12\sqrt{2},\quad \therefore y=6\sqrt{2}$$

$x=4\sqrt{2}$ を②に代入して、

$$32+z^2=81$$

$$z^2=81-32=49$$

$z>0$ より、

$$\mathrm{AH}=z=7$$

(1) △ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{AH}$$

$$=\frac{1}{2}\times10\sqrt{2}\times7=\boxed{35\sqrt{2}}$$

(2) 内心を I とし、求める内接円の半径を r とおくと、

$$S=\triangle\mathrm{IAB}+\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}$$

$$=\frac{1}{2}\times(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})\times r$$

なので、

$$35\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times\left(9+10\sqrt{2}+11\right)\times r$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\times\overset{5}{\cancel{10}}\left(2+\sqrt{2}\right)\times r$$

$$\therefore r=\frac{\overset{7}{\cancel{35}}\sqrt{2}}{\cancel{5}\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{7\sqrt{2}\times\left(2-\sqrt{2}\right)}{\underbrace{\left(2+\sqrt{2}\right)\times\left(2-\sqrt{2}\right)}_{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=4-2=2}}$$

$$=\frac{14\sqrt{2}-14}{2}$$

$$=\boxed{7\sqrt{2}-7}$$