中2数学C 2019年度1学期 本問解答
§7 2次方程式の応用

※ 欠席してしまった場合は、問 7.1, 問 7.3, 問 7.4 を（余裕があれば他の問題も）自分で確認し、p.7 の宿題 H7.1〜H7.3 に取り組んで提出してください。

問7.1

(1) 長方形の縦の長さを x 、横の長さを y とすると、

面積が 6 で周の長さが 12 ……☆

という条件は、

$$\begin{cases} xy = 6 & \cdots\cdots ① \\ 2(x+y) = 12 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

と表せる。

☆をみたす長方形が存在するかどうかは、「①かつ②」をみたす実数 x, y が存在するかどうかで判定できる。

(なお、そのような実数 x, y が存在すれば、①より、それらは同符号で、さらに②より、それらはともに正である。)

②より

$$x + y = 6, \qquad \therefore y = -x + 6 \ \cdots\cdots ③$$

③を①に代入すると、

$$x(-x+6) = 6, \qquad -x^2 + 6x = 6, \qquad \therefore x^2 - 6x = -6$$

と、x の 2 次方程式を得る。これを解くと、

$$x^2 - 6x + 9 = -6 + 9$$

$$(x-3)^2 = 3$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{3}$$

$$\therefore x = 3 \pm \sqrt{3}$$

これを③に代入して、

$$y = -\left(3 \pm \sqrt{3}\right) + 6$$

$$= -3 \mp \sqrt{3} + 6 = 3 \mp \sqrt{3}$$

よって、「①かつ②」は、

$x = 3 \pm \sqrt{3}, y = 3 \mp \sqrt{3}$ （以上，すべて複号同順）

という実数解をもつ。

以上より、☆をみたす長方形は$\boxed{\text{存在}}$し、その縦横の長さは、

$\boxed{縦 : 3 \pm \sqrt{3}, \quad 横 : 3 \mp \sqrt{3}}$ （複号同順）

である。

(2) 長方形の縦の長さを x 、横の長さを y とすると、

面積が 6 で周の長さが 8 ………★

という条件は、

$$\begin{cases} xy = 6 & \cdots\cdots① \\ 2(x+y) = 8 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

と表せる。

★をみたす長方形が存在するかどうかは、「①かつ②」をみたす実数 x, y が存在するかどうかで判定できる。

②より

$$x + y = 4, \qquad \therefore y = -x + 4 \ \cdots\cdots③$$

③を①に代入すると、

$$(-x+4)x = 6, \qquad -x^2 + 4x = 6, \qquad \therefore x^2 - 4x = -6$$

と、x の 2 次方程式を得る。

これを解こうとすると、

$$x^2 - 4x + 4 = -6 + 4$$

$$(x-2)^2 = -2$$

となるが、これをみたす実数 x は存在しない。

よって、「①かつ②」は実数解をもたず、★をみたす長方形は$\boxed{\text{存在しない}}$。

問7.2

(1)

$$\begin{cases} y = x + 2 & \cdots\cdots① \\ x^2 + y^2 = 3 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①を②に代入して、

$$x^2 + (x+2)^2 = 3$$

$$2x^2 + 4x + 4 = 3$$

$$x^2 + 2x = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2} + 1$$

$$(x+1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

これを①に代入して、

$$y = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} + 2$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(以上、すべて複号同順)

したがって、「①かつ②」の解は

$$\boxed{x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2},\ y = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{複号同順})}$$

(2)

$$\begin{cases} x + 2y = 5 & \cdots\cdots① \\ xy = -2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より、

$$x = -2y + 5 \cdots\cdots①'$$

これを②に代入して、

$$(-2y+5)y = -2$$

$$-2y^2 + 5y = -2$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y = 1$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16} = 1 + \frac{25}{16}$$

$$\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{41}{16}$$

$$y - \frac{5}{4} = \pm\frac{\sqrt{41}}{4}$$

$$\therefore y = \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4}$$

これを①'に代入して、

$$x = -2\left(\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4}\right) + 5$$

$$= \frac{5}{2} \mp \frac{\sqrt{41}}{2}$$

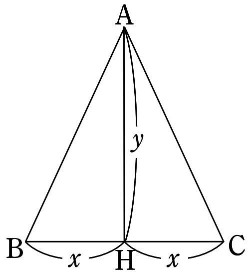
(以上、すべて複号同順)

したがって、「①かつ②」の解は

$$\boxed{x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2},\ y = \frac{5 \mp \sqrt{41}}{4} \quad (\text{複号同順})}$$

問7.3

A から BC に下ろした垂線の足を H とする。AB=AC より、H は BC の中点と一致する。
$\mathrm{BH}=\mathrm{CH}=x$，$\mathrm{AH}=y$ とおくと、△ABC の面積が $4\sqrt{3}$ であることより、



$$4\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\times 2x\times y=xy$$

$$\therefore xy=4\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。また、△ABH にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{BH}^2+\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2$$

$$\therefore x^2+y^2=4^2 \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。 連立方程式 ①, ② を解こう。

①より、

$$y=\frac{4\sqrt{3}}{x} \qquad \cdots\cdots ①'$$

だから、これを②に代入して、

$$x^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{x}\right)^2=16$$

$$x^4+48=16x^2 \qquad \text{（両辺に } x^2 \text{ を掛けた）}$$

$$x^4-16x^2+48=0$$

$$x^4-16x^2+8^2=-48+8^2$$

$$(x^2-8)^2=16$$

$$x^2-8=4,-4$$

$$x^2=12,4$$

$x>0$ だから、$x=2\sqrt{3},2$ を得る。 ①'に代入すると、

$$x=2\sqrt{3} \text{ のとき } y=\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=2, \quad x=2 \text{ のとき } y=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

となる。以上より、連立方程式①, ②の $x,y>0$ となる解は

$$(x,y)=\left(2\sqrt{3},2\right),\left(2,2\sqrt{3}\right)$$

であり、求める BC の長さは $2x=\boxed{4\sqrt{3},\,4}$

問7.4

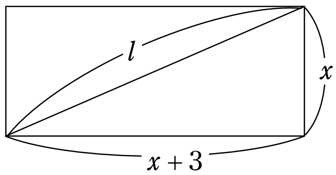
長方形の縦と横の長さの差が3なので、それらをx, $x+3$とおく。

すると、面積が9なので、

$$x(x+3)=9$$

$$\therefore x^2+3x=9 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。



①を解き、縦と横の長さを明らかにしてから対角線の長さを求めてもよいが、やや面倒である。対角線の長さをlとすると、ピタゴラスの定理より、

$$\begin{aligned} l^2 &= x^2+(x+3)^2 \\ &= 2x^2+6x+9 \\ &= 2(x^2+3x)+9 \end{aligned}$$

となるから、ここに①を代入すれば、

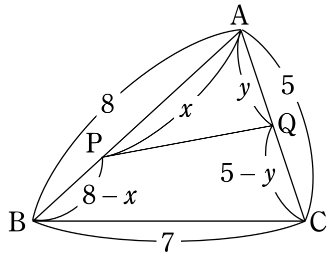
$$l^2 = 2\times 9+9=27, \qquad \therefore l=\boxed{3\sqrt{3}}\ (>0)$$

となる。

(縦と横の長さの差を3に保ったまま、長方形の面積はいくらでも小さくできるし、いくらでも大きくできる。連続的に変形することで、面積をちょうど9にすることができることも、直感的に納得できるであろう。そこで、①の$x>0$なる解が存在することは認めることにする。)

※　①の$x>0$なる解を求めると、$x=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}$である。

問7.5



$\mathrm{AP}=x, \mathrm{AQ}=y$ とおく。
△APQ と四角形 PBCQ の周の長さが等しいことに注目すると、

$$\mathrm{AP}+\cancel{\mathrm{PQ}}+\mathrm{QA}=\mathrm{PB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CQ}+\cancel{\mathrm{PQ}}$$

なので、

$$x+y=(8-x)+7+(5-y)$$
$$2x+2y=20$$
$$\therefore\ x+y=10 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。
次に、△APQ と四角形 PBCQ は面積が等しいことから、△APQ の面積が△ABC の面積の $\frac{1}{2}$ となることに注目すると、

$$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}\times\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AC}}\times\triangle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{x}{8}\times\frac{y}{5}\times\triangle\mathrm{ABC}$$

なので、

$$\frac{x}{8}\times\frac{y}{5}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ xy=20 \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。

①より

$$y=-x+10 \quad \cdots\cdots ①'$$

①'を②に代入すると、

$$x(-x+10)=20$$
$$-x^2+10x=20$$
$$x^2-10x+20=0$$

と、x の 2 次方程式を得る。

これを解くと、

$$x^2-10x=-20$$
$$x^2-10x+25=-20+25$$
$$(x-5)^2=5$$
$$x-5=\pm\sqrt{5}$$
$$\therefore\ x=5\pm\sqrt{5}$$

これを①'に代入して、

$$y=-\left(5\pm\sqrt{5}\right)+10$$
$$=-5\mp\sqrt{5}+10=5\mp\sqrt{5}$$

(以上、すべて複号同順)
いま、$\mathrm{AP}=x, \mathrm{AQ}=y$ なので、

$$0<x<8,\quad 0<y<5$$

を満たしていることから、

$$x=5+\sqrt{5},\ y=5-\sqrt{5}$$

と分かる。（$0<\sqrt{5}<\sqrt{9}=3$ に注意。）以上より、

$$\boxed{\mathrm{AP}=5+\sqrt{5}, \mathrm{AQ}=5-\sqrt{5}}$$

である。