

中2数学C 2019年度1学期 本問解答

§8 ピタゴラスの定理と計量

※ 欠席してしまった場合は、問 8.1, 問 8.3, 問 8.4 を（余裕があれば問 8.5 も）自分で確認し、p.11 の宿題 H8.1～H8.3 に取り組んで提出してください。

問8.1

$AC = x$ とおく。

$$BC = PC = AC + AP = x + 10, AB = 70, \angle BAC = 90^\circ$$

なので、 $\triangle ABC$ にピタゴラスの定理を用いて、

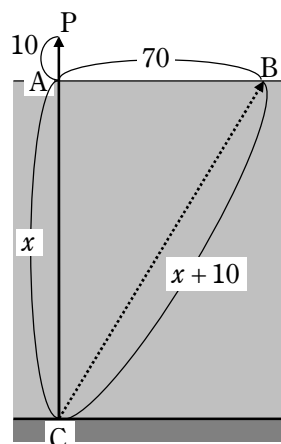
$$(x+10)^2 = x^2 + 70^2$$

$$\cancel{x^2} + 20x + 100 = \cancel{x^2} + 4900$$

$$20x = 4900 - 100 = 4800$$

$$\therefore x = 4800 \times \frac{1}{20} = 240$$

よって、堀の水深は 240cm



問8.2

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7^2 & (\triangle ABH \text{ にピタゴラスの定理}) \dots\dots ① \\ a^2 + c^2 = 9^2 & (\triangle ACH \text{ にピタゴラスの定理}) \dots\dots ② \\ b + c = 8 & (BC = 8) \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$① - ② \text{ より、 } b^2 - c^2 = 7^2 - 9^2 \dots\dots ④$$

(方針Ⅰ)

③より、 $c = 8 - b \dots\dots \star$ なので、

④に $\star$ を代入して、

$$b^2 - (8 - b)^2 = 7^2 - 9^2$$

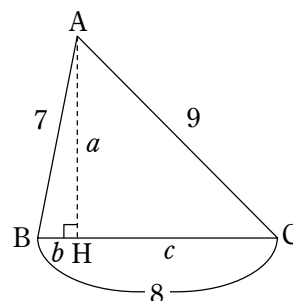
$$b^2 - (64 - 16b + b^2) = (7 + 9)(7 - 9)$$

$$\cancel{b^2} - 64 + 16b - \cancel{b^2} = 16 \times (-2)$$

$$16b = -32 + 64 = 32 \quad \therefore b = 2$$

$$① \text{ に代入して、 } a^2 + 2^2 = 7^2 \quad a^2 = 49 - 4 = 45$$

$$a > 0 \text{ より、 } AH = a = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}}, \quad BH = b = \boxed{2}, \quad CH = c = 8 - b = \boxed{6}$$



(方針Ⅱ)

$$④ \text{ より、 } (b + c)(b - c) = (7 + 9)(7 - 9)$$

$$③ \text{ を代入して、 } 8(b - c) = 16 \times (-2)$$

$$\text{両辺を8で割って、 } b - c = -4 \dots\dots ⑤$$

$$\begin{cases} b + c = 8 & \dots\dots ③ \\ b - c = -4 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$③ + ⑤ \text{ より、 } 2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

問8.3

(1) $AH = a, BH = b, CH = c$ とおく。

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5^2 & (\triangle ABH \text{ にピタゴラスの定理}) \dots\dots ① \\ a^2 + c^2 = 7^2 & (\triangle ACH \text{ にピタゴラスの定理}) \dots\dots ② \\ b + c = 6 & (BC = 6) \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$① - ② \text{ より、 } b^2 - c^2 = 5^2 - 7^2 \dots\dots ④$$

(方針Ⅰ)

③より、 $c = 6 - b \dots\dots \star$ なので、

④に $\star$ を代入して、

$$b^2 - (6 - b)^2 = 5^2 - 7^2$$

$$b^2 - (36 - 12b + b^2) = (5 + 7)(5 - 7)$$

$$\cancel{b^2} - 36 + 12b - \cancel{b^2} = 12 \times (-2)$$

$$12b = -24 + 36 = 12 \quad \therefore b = 1$$

(よって、 $BH = 1$)

$$① \text{ に代入して、 } a^2 + 1^2 = 5^2 \quad a^2 = 25 - 1 = 24$$

$$a > 0 \text{ より、 } AH = a = \sqrt{24} = \boxed{2\sqrt{6}}$$

$$(2) \text{ (i) } (1) \text{ より、 } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{6} = \boxed{6\sqrt{6}}$$

(ii) $\triangle ABC$ の内接円の半径を r とおき、内心を I とおく。

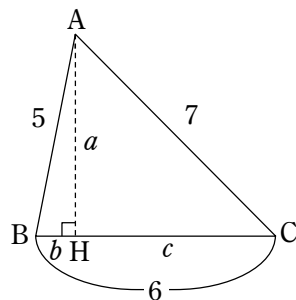
$\triangle ABC = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$ より、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (AB + BC + CA) \times r \text{ なので、}$$

$$(i) \text{ より、 } 6\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times (5 + 6 + 7) \times r$$

$$9r = 6\sqrt{6}$$

$$\therefore r = \frac{{}^2\cancel{6}\sqrt{6}}{{}_3\cancel{9}} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$



(方針Ⅱ)

$$④ \text{ より、 } (b + c)(b - c) = (5 + 7)(5 - 7)$$

$$③ \text{ を代入して、 } 6(b - c) = 12 \times (-2)$$

$$\text{両辺を6で割って、 } b - c = -4 \dots\dots ⑤$$

$$\begin{cases} b + c = 6 & \dots\dots ③ \\ b - c = -4 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + c = 6 & \dots\dots ③ \\ b - c = -4 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$③ + ⑤ \text{ より、 } 2b = 2 \quad \therefore b = 1$$

(よって、 $BH = 1$)

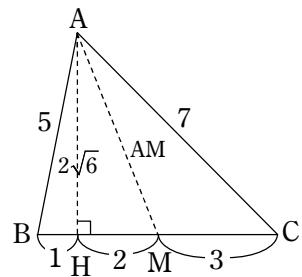
(3) (i) M は BC の中点なので、 $BM = CM = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3$

よって、 $HM = BM - BH = 3 - 1 = 2$

△AHM にピタゴラスの定理を用いて、

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 = (2\sqrt{6})^2 + 2^2 = 24 + 4 = 28$$

$AM > 0$ より、 $AM = \sqrt{28} = \boxed{2\sqrt{7}}$



(ii) AD は∠BAC の2等分線なので、

$$BD : DC = AB : AC = 5 : 7$$

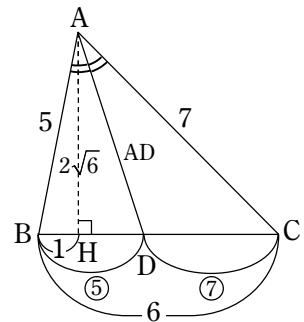
よって、 $BD = BC \times \frac{BD}{BD + DC} = 6 \times \frac{5}{5 + 7} = \frac{5}{2}$

$$HD = BD - BH = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$$

△AHD にピタゴラスの定理を用いて、

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 = (2\sqrt{6})^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 24 + \frac{9}{4} = \frac{105}{4}$$

$AD > 0$ より、 $AD = \sqrt{\frac{105}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{105}}{2}}$



問8.4

斜辺一辺相等で $\triangle ABE \equiv \triangle ADF$ だから、

$$BE = DF = x$$

とおける。

直角三角形 ABE にピタゴラスの定理を用いて、

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 = 1 + x^2$$

$CE = CF = 1 - x$ となるから、 $\triangle CEF$ は直角二等辺三角形で、

$$EF = \sqrt{2} CE = \sqrt{2}(1 - x), \quad \therefore EF^2 = 2(1 - x)^2 = 2(x - 1)^2$$

$\triangle AEF$ が正三角形であることより、 $AE^2 = EF^2$ だから、

$$1 + x^2 = 2(x - 1)^2$$

が成り立つ。これを解くと、

$$1 + x^2 = 2x^2 - 4x + 2$$

$$x^2 - 4x = -1$$

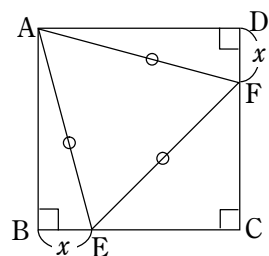
$$x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$

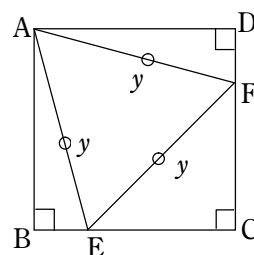
$$(x - 2)^2 = 3$$

$$x - 2 = \sqrt{3}, -\sqrt{3}$$

よって、 $x = 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$ を得る。ここで、 $x = BE$ より、 $0 < x < 1$ であるが、 $1 < \sqrt{3} < 2$ だから、これをみたすのは $x = 2 - \sqrt{3}$ の方だけである。このとき、 $\triangle AEF$ の一辺の長さは、

$$EF = \sqrt{2}(1 - x) = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) = \boxed{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$





問8.5

A を通り、BC、EF の両方に垂直な直線を引き、BC、EF との交点をそれぞれ H、I とする。
このとき、 $\triangle ABH$ と $\triangle AFI$ はどちらも $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角定規の形になっていて、

$$BH = FI = 1, AH = AI = \sqrt{3}$$

である。

$\triangle APH$ と $\triangle QAI$ において、

$$\angle AHP = \angle QIA (= 90^\circ) \dots\dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \angle APH &= \angle PAI - \angle PHA \quad (\text{外角定理}) \\ &= \angle PAI - 90^\circ \\ &= \angle PAI - \angle PAQ \\ &= \angle QAI \end{aligned}$$

$$\therefore \angle APH = \angle QAI \dots\dots\dots ②$$

なので、①、②より

$$\triangle APH \sim \triangle QAI \quad (\text{二角相等}) \dots\dots ③$$

が成り立つ。③の対応する辺の比が等しいので、

$$AH : HP = QI : IA \dots\dots\dots ④$$

ここで、 $BP = x$ とおくと、仮定より $FQ = 3x$ なので、④より、

$$\sqrt{3} : (1+x) = (1+3x) : \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1+x} = \frac{1+3x}{\sqrt{3}}$$

$$(1+x)(1+3x) = 3$$

$$1+4x+3x^2 = 3$$

$$3x^2 + 4x - 2 = 0$$

両辺を 3 で割って、

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

$$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

$$x + \frac{2}{3} = \pm \frac{\sqrt{10}}{3} \quad \therefore x = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$x = BP$ だから、 $x > 0$ であるが、2 つの解のうち、これをみたすのは $x = \frac{-2+\sqrt{10}}{3}$ の方

である。また、 $3x = FQ$ だから、 x は $3x < 2$ も満たさなくてはならないが、 $\sqrt{10} < 4$ より、

$$3x = -2 + \sqrt{10} < 2 \text{ である。したがって、} BP = \boxed{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}}$$

