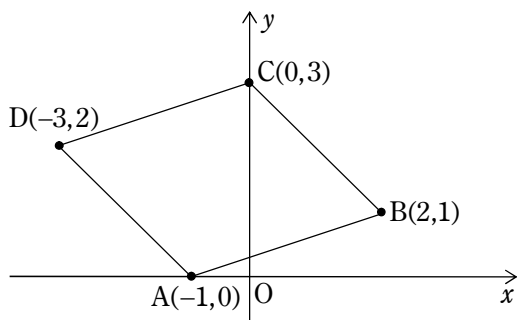


中2数学C 2019年度1学期 本問解答

§10 点の移動

※ 欠席してしまった場合は、問 10.1～問 10.3 を（余裕があれば問 10.4 も）自分で確認し、p.19 の宿題 H10.1～H10.3 に取り組んで提出してください。

問10.1



四角形が平行四辺形となる条件を(定義を含めて)5つ覚えているだろうか。

- (ア) 向い合う2組の辺が平行。
- (イ) 向い合う2組の辺が等しい。
- (ウ) 向い合う2組の角が等しい。
- (エ) 対角線が互いに他を2等分する。
- (オ) 向い合う1組の辺が平行かつ等しい。

(ウ)以外の4つは、以下のように座標計算で簡単に示せる。

- (ア) A から B へは、
 x 方向に $2 - (-1) = 3$,
 y 方向に $1 - 0 = 1$
 だけ平行移動している。…………… ①

- D から C へは、
 x 方向に $0 - (-3) = 3$,
 y 方向に $3 - 2 = 1$
 だけ平行移動している。…………… ②

- A から D へは、
 x 方向に $-3 - (-1) = -2$,
 y 方向に $2 - 0 = 2$
 だけ平行移動している。…………… ③

- B から C へは、
 x 方向に $0 - 2 = -2$,
 y 方向に $3 - 1 = 2$
 だけ平行移動している。…………… ④

- ①, ②より、AB の傾きも DC の傾きも $\frac{1}{3}$ であるので、 $AB \parallel DC$ と分かる。
 また、③, ④より、AD の傾きも BC の傾きも $\frac{2}{-2} = -1$ であるので、 $AD \parallel BC$ と分かる。
 したがって、ABCD は向い合う2組の辺が平行だから平行四辺形である。

- (イ) ①, ②より、AB の長さも DC の長さも $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ と分かる。
 また、③, ④より、AD の長さも BC の長さも $\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ と分かる。
 したがって、ABCD は向い合う2組の辺が等しいので平行四辺形である。

- (エ) 線分 AC の中点は、
 $\left(\frac{-1+0}{2}, \frac{0+3}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$
 であり、線分 BD の中点は、
 $\left(\frac{2+(-3)}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$
 である。
 これらは一致するから、ABCD の2本の対角線がそれぞれの中点で交わっていることが分かる。したがって、ABCD は平行四辺形である。

(オ) ①, ②より、AB の傾きも DC の傾きも $\frac{1}{3}$

であるので、 $AB \parallel DC$ と分かる。

さらに、①, ②より、AB の長さも DC の長さも

$$\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

と分かる。

したがって、ABCD は向い合う 1 組の辺が平行かつ等しいので平行四辺形である。

なお、 $AB \parallel DC$ かつ $AB = DC$ であることを確認するには、①, ②から傾きと長さを計算せずとも、

A から B への移動(変位)と

D から C への移動(変位)が一致している

ことだけをみれば(①, ②そのもので)十分であると分かるだろう。

以下、例えば、①を「A から B への移動は

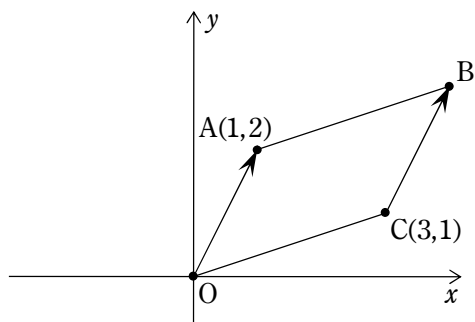
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である」のように表現することにする。

($\overrightarrow{AB}$ は「ベクトル AB」と読む。)

問10.2

(1)



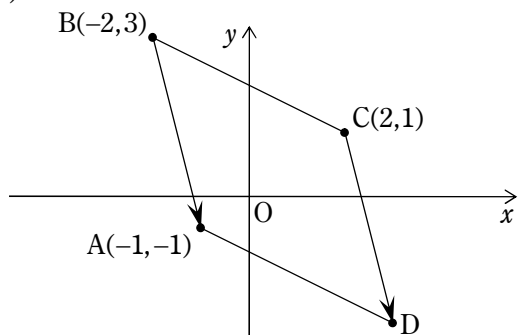
B は、C(3,1) から

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

だけ移動した点なので、その座標は

$$(3+1, 1+2) = \boxed{(4, 3)}$$

(2)



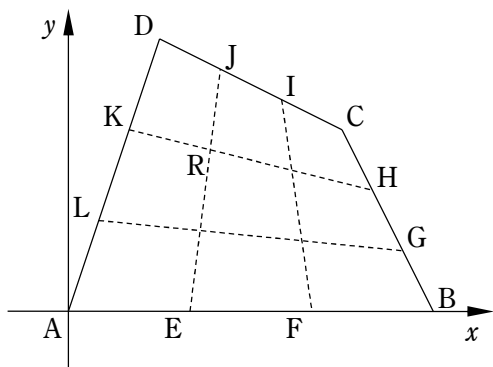
D は、C(2,1) から

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

だけ移動した点なので、その座標は

$$(2+1, 1+(-4)) = \boxed{(3, -3)}$$

問10.3



(1) まず、E, F の座標が

$$\boxed{E(4,0)}, \quad \boxed{F(8,0)}$$

であることがわかる。次に、A から K までの移動は、A から D までの移動

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

の $\frac{2}{3}$ 倍と考えられるから、

$$\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \times 3 \\ \frac{2}{3} \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(このことを

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

と書いてよい。)

K は原点 A からこれだけ移動した点なので、その座標は $\boxed{K(2,6)}$

同様に、L は原点 A から

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

だけ移動した点なので、その座標は

$$\boxed{L(1,3)}$$

(2) B から C への移動は

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 9-12 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

である。B から G への移動はこの $\frac{1}{3}$ 倍で

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

G は B(12,0) からこれだけ移動した点なので、その座標は $(12+(-1), 0+2)$ 、つまり $\boxed{G(11,2)}$

同様に、H は B(12,0) から

$$\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

だけ移動した点なので、その座標は $(12-2, 0+4)$ 、つまり $\boxed{H(10,4)}$

C から D への移動は

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3-9 \\ 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

である。C から I への移動はこの $\frac{1}{3}$ 倍で

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I は C(9,6) からこれだけ移動した点なので、その座標は $(9-2, 6+1)$ 、つまり

$$\boxed{I(7,7)}$$

同様に、J は C(9,6) から

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CD} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

だけ移動した点なので、その座標は $(9-4, 6+2)$ 、つまり $\boxed{J(5,8)}$

(3)

$$\overrightarrow{KH} = \begin{pmatrix} 10-2 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

で、K から P への移動はこの $\frac{1}{3}$ 倍だから

$$\overrightarrow{KP} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

P は K(2,6) からこれだけ移動した点なので、その座標は

$$\left(2 + \frac{8}{3}, 6 - \frac{2}{3} \right) = \boxed{\left(\frac{14}{3}, \frac{16}{3} \right)}$$

(4)

$$\overrightarrow{JE} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

で、J から Q への移動はこの $\frac{1}{3}$ 倍だから

$$\overrightarrow{JQ} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Q は J(5,8) からこれだけ移動した点なので、その座標は

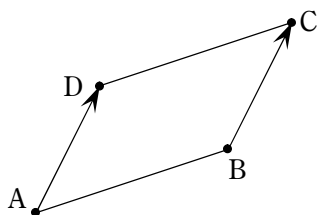
$$\left(5 - \frac{1}{3}, 8 - \frac{8}{3} \right) = \boxed{\left(\frac{14}{3}, \frac{16}{3} \right)}$$

(5) P と Q が一致したので、これが KH と JE

の交点 R に他ならない。 $\boxed{R\left(\frac{14}{3}, \frac{16}{3}\right)}$

問10.4

(1)



平行四边形 $ABCD$ の3頂点が格子点であるとする。必要なら頂点の名前を付け替えることにより、 A, B, C が格子点であるとしてよい。このとき D も格子点であることを示そう。

A, B, C の座標を順に

$$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$$

($a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ は整数) とする。 D は、 A から

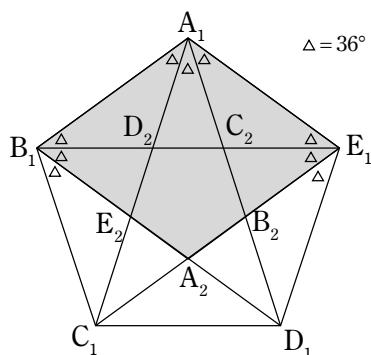
$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

だけ移動した点なので、その座標は

$$(a_1 + c_1 - b_1, a_2 + c_2 - b_2)$$

である。 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ は整数なので、 D の x 座標、 y 座標はともに整数であり、 D も格子点であることが示された。

(2)



座標平面に正五角形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ があって、その5つの頂点が格子点であったと仮定する。5本の対角線の交点を図のように A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 とおく。

このとき、四角形 $A_1B_1A_2E_1$ は平行四辺形となる。(例えば、同側内角定理で $A_1B_1 \parallel E_1A_2$, $A_1E_1 \parallel B_1A_2$ がいえる。)

A_1, B_1, E_1 は格子点だから、(1)より、 A_2 も格子点となる。同様にして、 B_2, C_2, D_2, E_2 も格子点であることが分かる。こうして、5頂点が格子点であるような正五角形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ の内部に、5頂点が格子点であるような正五角形 $A_2B_2C_2D_2E_2$ が作られた。($A_2B_2C_2D_2E_2$ も正五角形であることを証明してみよう。)

$A_2B_2C_2D_2E_2$ の対角線の交点を頂点とする正五角形 $A_3B_3C_3D_3E_3$ を作れば、上と同様の議論により、その5頂点もまた格子点である。以下、これを続けると、どんどん小さくなる「5頂点が格子点であるような正五角形」の列が作られていく。特に、その1辺の長さはどんどん短くなっていく。ところが、2つの格子点を結ぶ線分の長さは1以上であるから、これは矛盾である。

以上より、5つの格子点を頂点とする正五角形は存在しない。