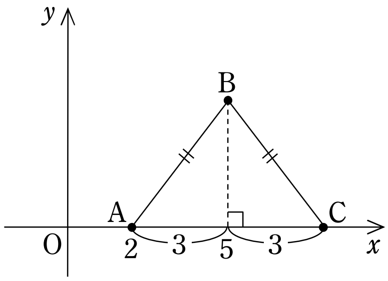
中2数学C 2019年1学期 本問解答
§11　2点間の距離

※　欠席してしまった場合は、問 11.1～ 問 11.4 を（余裕があれば 問 11.5 も）自分で確認し、p.23 の宿題 H11.1～H11.3 に取り組んで提出してください。

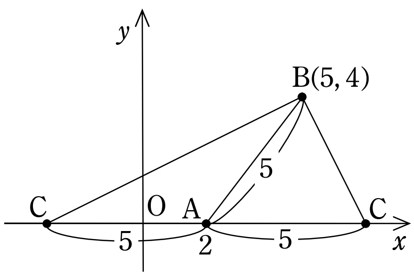
問11.1

(1)　$BA = BC$ の二等辺三角形になるような x 軸上の点 C は、下の図より、$\boxed{(8,0)}$ である。

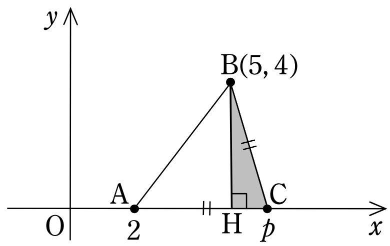


(2)　$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \boxed{5}$

だから、$AB = AC$ の二等辺三角形になるような x 軸上の点 C は、下の図より、$\boxed{(-3,0),(7,0)}$ である。



(3)　$CA = CB$ の二等辺三角形になるような x 軸上の点 C の x 座標を p とおいて、方程式を立てよう。



CA の長さは、$|p-2|$ である。また、B から直線 AC（x 軸）に下ろした垂線の足を H とすると、

$CH = |p-5|$，$BH = 4$

だから、△BCH にピタゴラスの定理を用いて、

$$CB = \sqrt{CH^2 + BH^2}$$
$$= \sqrt{\left(|p-5|\right)^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{(p-5)^2 + 4^2}$$

である。

したがって、$CA = CB$ となるのは

$$CA^2 = CB^2$$
$$\left(|p-2|\right)^2 = \left(\sqrt{(p-5)^2 + 4^2}\right)^2$$
$$\therefore (p-2)^2 = (p-5)^2 + 4^2$$

のときである。これを解くと、

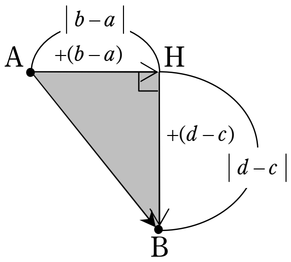
$$p^2 - 4p + 4 = p^2 - 10p + 25 + 16$$
$$6p = 37$$
$$\therefore p = \frac{37}{6}$$

よって、C の座標は $\boxed{\left(\frac{37}{6}, 0\right)}$ である。

$\mathrm{A}(a,c)$, $\mathrm{B}(b,d)$ に対し、A から B への移動は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} b-a \\ d-c \end{pmatrix}$$

なので、



A を通り x 軸に平行な直線と、B を通り y 軸に平行な直線の交点を H とすると、（$b-a, d-c$ 自体は負の値かもしれないので、絶対値を用いて）

$$\mathrm{AH}=|\, b-a \,|$$

$$\mathrm{BH}=|\, d-c \,|$$

となる。
したがって、ピタゴラスの定理より、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\sqrt{\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2}\\&=\sqrt{\left(|\, b-a \,|\right)^2+\left(|\, d-c \,|\right)^2}\\&=\boxed{\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}}\end{aligned}$$

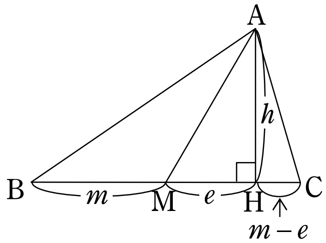
この式は、

$$\sqrt{x, y\text{軸方向の移動量の 2 乗の和}}$$

の形になっている。
x 軸方向の移動量の AH の長さ、
y 軸方向の移動量の BH の長さ
は、それぞれ絶対値が同じなので、これらの 2 乗の和も同じになることに着目。
今後は、2 点間の距離を計算する際には、「移動量の 2 乗の和」を用いて計算していくことにする。

問11.2

[座標を用いない証明]



A から直線 BC へ下ろした垂線の足を H とし、

$$\mathrm{MH}=e,\ \mathrm{BM}=\mathrm{CM}=m,\ \mathrm{AH}=h$$

とおく。△ABH, △ACH にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{AB}^2=(m+e)^2+h^2$$
$$\mathrm{AC}^2=(m-e)^2+h^2$$

したがって、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2&=(m+e)^2+(m-e)^2+2h^2\\&=(m^2+2me+e^2)\\&\quad+(m^2-2me+e^2)+2h^2\\&=2(m^2+e^2+h^2)\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

一方、△AMH にピタゴラスの定理を用いると、$\mathrm{AM}^2=e^2+h^2$（M=H のときもこれでよい）であるから、

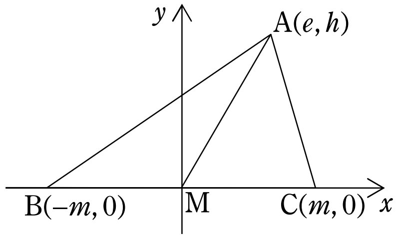
$$\begin{aligned}&2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)\\&\quad=2(e^2+h^2+m^2)\ \cdots\cdots②\end{aligned}$$

①, ②より、

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

が成り立つことが示された。

[座標を用いた証明]



M を原点とし、直線 BC に沿って x 軸を、それに垂直に y 軸を設定する。 A, B, C の座標をそれぞれ、

$$\mathrm{A}(e,h),\ \mathrm{B}(-m,0),\ \mathrm{C}(m,0)$$

とおく。すると、2 点間の距離公式により、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(-m-e)^2+(0-h)^2\\&=(m+e)^2+h^2\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=(m-e)^2+(0-h)^2\\&=(m-e)^2+h^2\end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2&=(m+e)^2+(m-e)^2+2h^2\\&=(m^2+2me+e^2)\\&\quad+(m^2-2me+e^2)+2h^2\\&=2(m^2+e^2+h^2)\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

再び、2 点間の距離公式により、

$$\begin{aligned}&2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)\\&\quad=2(e^2+h^2+m^2)\ \cdots\cdots②\end{aligned}$$

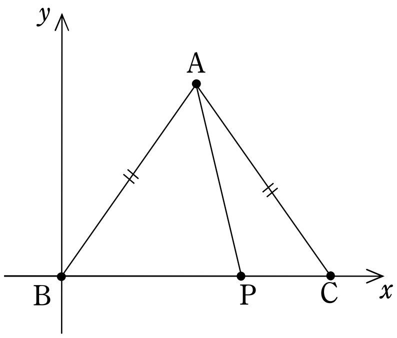
①, ②より、

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

が成り立つことが示された。

※ 上の 2 つの証明は本質的に同じものである。2 点間の距離公式はピタゴラスの定理から作ったものだから当然ともいえる。ただし、座標を用いた証明では、垂線の足 H が直線 BC のどこにあっても（問題の図でないような場合でも）、場合分けをする必要がない。

問11.3



B を原点とし、直線 BC に沿って x 軸を、それに垂直に y 軸を設定する。 C, P の座標をそれぞれ

$$\mathrm{C}(2c,0),\ \mathrm{P}(p,0),\quad (0<p<2c)$$

とおく。△ABC は AB=AC の二等辺三角形だから、A から BC への中線と垂線は一致する。したがって、A の x 座標は c となり、A の座標は (c,a) とおける。すると、

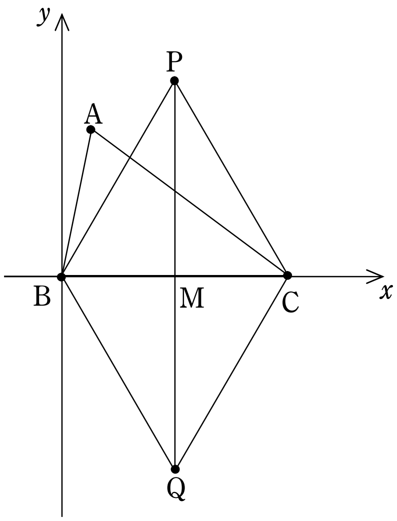
$$\begin{aligned}&\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}\times\mathrm{PC}\\&\quad=(p-c)^2+(0-a)^2+p(2c-p)\\&\quad=p^2-2pc+c^2+a^2+2pc-p^2\\&\quad=c^2+a^2\end{aligned}$$

となり、これは AB^2 に等しい。
以上で、

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}\times\mathrm{PC}$$

が示された。

問11.4



B を原点とし、直線 BC に沿って x 軸を、それに垂直に y 軸を設定する。 A, C の座標をそれぞれ

$$\mathrm{A}(a,b),\ \mathrm{C}(2c,0)\quad(c>0)$$

とおく。C の中点を M とおくと、△PBM △QBM は 30°, 60°, 90° の三角形で、

$$\mathrm{BM}:\mathrm{PB}:\mathrm{PM}=\mathrm{BM}:\mathrm{QB}:\mathrm{QM}$$
$$=1:2:\sqrt{3}$$

なので、P, Q の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}\left(c,\sqrt{3}\,c\right),\ \mathrm{Q}\left(c,-\sqrt{3}\,c\right)$$

とわかる。これより、

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2$$
$$=\left\{(c-a)^2+\left(\sqrt{3}\,c-b\right)^2\right\}$$
$$+\left\{(c-a)^2+\left(-\sqrt{3}\,c-b\right)^2\right\}$$
$$=2(a-c)^2+\left(\sqrt{3}\,c-b\right)^2+\left(\sqrt{3}\,c+b\right)^2$$
$$=2a^2-4ac+2c^2$$
$$+3c^2\cancel{-2\sqrt{3}\,bc}+b^2+3c^2\cancel{+2\sqrt{3}\,bc}+b^2$$
$$=2a^2+2b^2+8c^2-4ac$$

である。

一方、

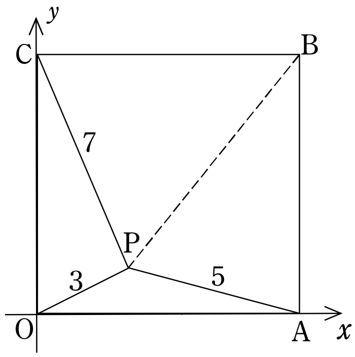
$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$$
$$=(a^2+b^2)+(2c)^2+\left\{(a-2c)^2+b^2\right\}$$
$$=a^2+b^2+4c^2+a^2-4ac+4c^2+b^2$$
$$=2a^2+2b^2+8c^2-4ac$$

であるから、

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$$

が示された。

問11.5



(1) O を原点とし、直線 OA に沿って x 軸を、直線 OC に沿って y 軸を設定する。正方形 OABC の 1 辺を $a(>0)$ とし、P の座標を $\mathrm{P}(p,q)$ とおく（$0<p<a$, $0<q<a$）と、

$$\mathrm{OP}=3,\ \mathrm{AP}=5,\ \mathrm{CP}=7$$

より、

$$p^2+q^2=3^2 \quad \cdots\cdots ①$$
$$(p-a)^2+q^2=5^2 \quad \cdots\cdots ②$$
$$p^2+(q-a)^2=7^2 \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。

$$\mathrm{BP}^2=(p-a)^2+(q-a)^2$$

であるが、②＋③－①より、

$$(p-a)^2+\cancel{q^2}+\cancel{p^2}+(q-a)^2-\cancel{p^2}-\cancel{q^2}$$
$$=25+49-9=65$$

だから、

$$\mathrm{BP}^2=(p-a)^2+(q-a)^2=65,$$
$$\therefore \mathrm{BP}=\boxed{\sqrt{65}}$$

(2) ①, ②, ③から a を求めるのが目的である。
p, q を a で表し、①へ代入して、a だけの方程式を作ろう。
②の左辺を展開すると、

$$p^2-2ap+a^2+q^2=5^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

となるので、①－④より、

$$2ap-a^2=9-25$$
$$2ap=a^2-16$$

$a>0$ より $2a\neq 0$ だから

$$p=\frac{a^2-16}{2a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

同様に、①－③より、

$$2aq-a^2=9-49$$
$$2aq=a^2-40$$
$$\therefore \quad q=\frac{a^2-40}{2a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤, ⑥を①へ代入して、

$$\left(\frac{a^2-16}{2a}\right)^2+\left(\frac{a^2-40}{2a}\right)^2=9$$
$$\frac{a^4-32a^2+256}{4a^2}+\frac{a^4-80a^2+1600}{4a^2}=9$$

(両辺に $4a^2$ を掛けて)

$$2a^4-112a^2+1856=36a^2$$
$$2a^4-148a^2+1856=0$$
$$a^4-74a^2+928=0$$

という a の 4 次方程式を得る。まず、平方完成を利用して a^2 を求めると、

$$a^4-2\times 37a^2+37^2=-928+37^2$$
$$(a^2-37)^2=-928+1369=441$$
$$a^2-37=21,-21$$
$$\therefore a^2=58, 16$$

となる。ここで $p, q>0$ だから、⑤, ⑥より $a^2>40$ であり、この条件をみたす正の a の値は $a=\sqrt{58}$ である。
以上より、正方形 OABC の 1 辺の長さは $\boxed{\sqrt{58}}$ である。

※ p, q の値も求めると

$$p=\frac{21\sqrt{58}}{58},\ q=\frac{9\sqrt{58}}{58}$$

であり、$0<p<a$，$0<q<a$ が成り立っていることが確認できる。