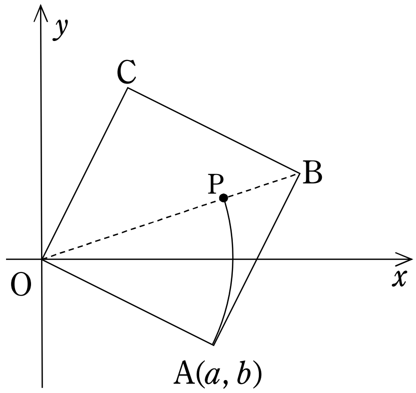
中2数学C 2019年度1学期 本問解答
§12 90度回転

※ 欠席してしまった場合は、問 12.1～問 12.3 を（余裕があれば問 12.4 も）
自分で確認してください。

問12.1



(1) C は、A を原点 O を中心として反時計回りに $90°$ 回転した点なので、その座標は

$\boxed{C(-b,a)}$

である。（ピンとこない人は、問 12.2 に先に取り組もう。）また、$\overrightarrow{AB}$ は

$$\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$$

と一致する。B は、$A(a,b)$ からこれだけ移動した点なので、その座標は

$$(a+(-b),b+a)=\boxed{(a-b,a+b)}$$

である。

(2) $\triangle OAB$ は $\angle A=90°$ の直角二等辺三角形だから、$OB=\sqrt{2}\,OA$ である。これより、

$$OP=OA=\frac{1}{\sqrt{2}}OB$$

となる。P は線分 OB 上の点だから、移動としても、

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OB}$$

が成り立ち、P の座標は、$\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{2}},\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}\right)$

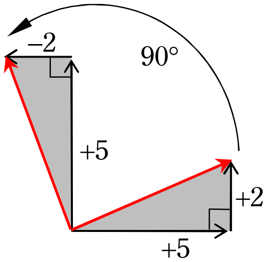
つまり

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}(a-b)}{2},\frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}\right)}$$

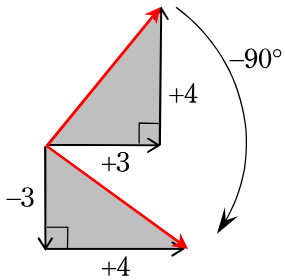
である。

問12.2

(1) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ を反時計回りに 90° 回転した移動は、$\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}}$ である。

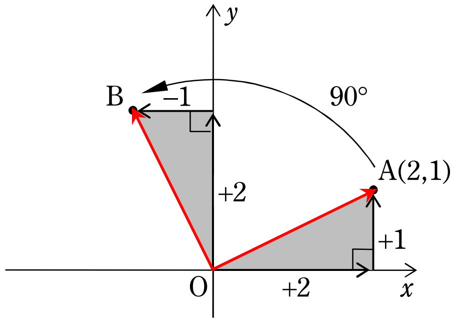


(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を時計回りに 90° 回転した移動は、$\boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}$ である。



一般に、移動 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を反時計回りに 90° 回転した移動は、$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ となり、時計回りに 90° 回転した移動は、$\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ となる。

(3) A(2,1) を原点を中心として反時計回りに 90° 回転した点 B の座標は $\boxed{(-1,2)}$ である。



(4) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を時計回りに 90° 回転した移動である。
ここで、

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

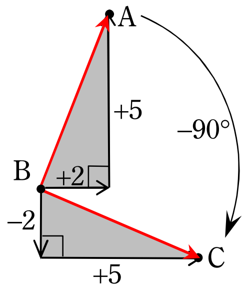
だから、

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

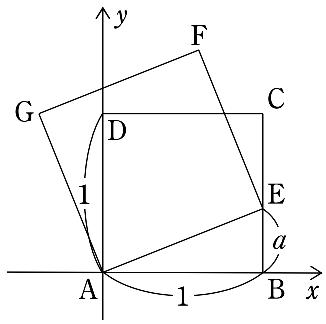
となる。C は、B(2,2) からこれだけ移動した点だから、その座標は、

$$(2+5, 2-2) = \boxed{(7,0)}$$

である。



問12.3

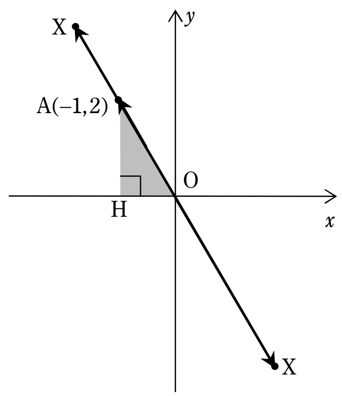


(1) E の座標は $\boxed{(1,a)}$ であり、
E を原点中心、反時計回りに90°回転した点 G の座標は $\boxed{(-a,1)}$ である。

(2) C, D, G はすべて y 座標が 1 なので、一直線上にある。

問12.4

(1)



A から x 軸に下ろした垂線の足を H とする。三角形 OAH にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{AH}^2=1^2+2^2=5,$$

$$\therefore \mathrm{OA}=\sqrt{5}$$

よって、

$$\frac{\mathrm{OX}}{\mathrm{OA}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}=\sqrt{3}$$

だから、$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ は、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ の $\sqrt{3}$ 倍、

または $-\sqrt{3}$ 倍、すなわち、

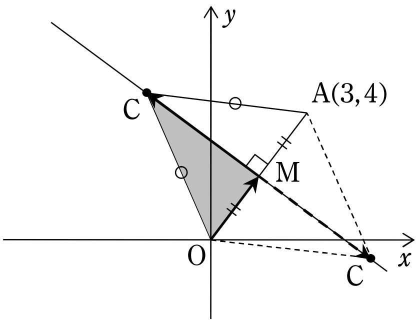
$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\2\sqrt{3}\end{pmatrix} \text{ または } \overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

である。X は、原点 O(0,0) からこれだけ移動した点なので、その座標は

$$\boxed{\left(-\sqrt{3},2\sqrt{3}\right),\ \left(\sqrt{3},-2\sqrt{3}\right)}$$

である。

(2)



CO = CA となる点 C は、線分 OA の垂直二等分線上にあり、線分 OA の中点を M とすると、△COM は $30°, 60°, 90°$ の三角定規の形なので、

$$\mathrm{OM}:\mathrm{CM}=1:\sqrt{3}$$

を満たす。

M の座標は $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ は、$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}$ を、

(i) 反時計回りに $90°$ 回転し、移動距離を $\sqrt{3}$ 倍したもの

か、あるいは

(ii) 時計回りに $90°$ 回転し、移動距離を $\sqrt{3}$ 倍したもの

になっている。

(i)のとき：

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\sqrt{3}\begin{pmatrix}-2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\\frac{3}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

となるから、C の座標は

$$\left(\frac{3}{2}-2\sqrt{3}, 2+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

である。

(ii)のとき：

$\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ は、(i)のときと符号が逆で、

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\sqrt{3}\begin{pmatrix}2\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\-\frac{3}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

となるから、C の座標は

$$\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3}, 2-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

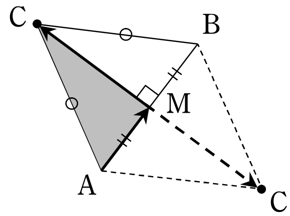
である。

以上より、C の座標は

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}-2\sqrt{3}, 2+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right), \left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3}, 2-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)}$$

である。

(3)



座標平面上の 3 点 A, B, C が正三角形の頂点をなすとする。
A, B が格子点であるとすると、C は格子点になり得ないことを示そう。

A, B を格子点とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ とすると、

これは B の座標から A の座標を引くことで計算されるから、a, b は整数である。また A, B の中点を M とすると、その座標は A, B の座標の平均として計算されるから、

$\left(\dfrac{c}{2}, \dfrac{d}{2}\right)$ （c, d は整数）

という形で表される。

(2)と同様に、$\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ は、$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ を反時計回りあるいは時計回りに $90°$ 回転し、移動量を $\sqrt{3}$ 倍したものになっているから、

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}\mp b\\ \pm a\end{pmatrix}\quad（複号同順）$$

と表される。ゆえに、C の座標は

$$\left(\frac{c\mp\sqrt{3}\,b}{2},\frac{d\pm\sqrt{3}\,a}{2}\right)\quad（複号同順）$$

となる。この x 座標と y 座標の少なくとも一方は整数ではないことを示そう。

A と B は異なる点だから、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ より、a,b の少なくとも一方は 0 でない。

$a\neq 0$ のとき、$\left(\frac{c-\sqrt{3}\,b}{2},\frac{d+\sqrt{3}\,a}{2}\right)$ の y 座標 $\frac{d+\sqrt{3}\,a}{2}$ が整数であると仮定し、これを n とおくと、

$$\frac{d+\sqrt{3}\,a}{2}=n$$

$$\sqrt{3}\,a=2n-d$$

$$\therefore\sqrt{3}=\frac{2n-d}{a}$$

となる。$2n-d,a$ は整数だから、この右辺は有理数であり、これは $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。したがって、背理法により、$\frac{d+\sqrt{3}\,a}{2}$ は整数ではない。同様に、$\left(\frac{c+\sqrt{3}\,b}{2},\frac{d-\sqrt{3}\,a}{2}\right)$ の y 座標 $\frac{d-\sqrt{3}\,a}{2}$ も整数でない。

$b\neq 0$ のときは、まったく同様にして、C の x 座標が整数ではないことが示される。

したがって、C の x 座標と y 座標の少なくとも一方は整数ではない。つまり、C は格子点ではない。

以上より、3 つの格子点を頂点とする正三角形が存在しないことが示された。