中2数学C　2019年度1学期　宿題解答
§7　2次方程式の応用

H7.1

(1)

$$\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より、

$$x=-2y+1 \cdots\cdots ①'$$

これを②に代入して、

$$(-2y+1)^2+y^2=2$$
$$5y^2-4y-1=0$$
$$y^2-\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}=0$$
$$y^2-\frac{4}{5}y+\frac{4}{25}=\frac{1}{5}+\frac{4}{25}$$
$$\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$
$$y-\frac{2}{5}=\frac{3}{5},-\frac{3}{5}$$
$$y=\frac{3}{5}+\frac{2}{5},-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$$

$\therefore\ y=1,-\dfrac{1}{5}$

これを①'に代入して、

$y=1$ のとき $x=-2+1=-1$

$y=-\dfrac{1}{5}$ のとき $x=\dfrac{2}{5}+1=\dfrac{7}{5}$

したがって、「①かつ②」の解は

$$\boxed{(x,y)=(-1,1),\left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right)}$$

(2)

$$\begin{cases} 2x+3y=4 & \cdots\cdots ① \\ xy=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より、

$$x=-\frac{3}{2}y+2 \cdots\cdots ①'$$

これを②に代入して、

$$\left(-\frac{3}{2}y+2\right)y=-1$$
$$-\frac{3}{2}y^2+2y=-1$$
$$y^2-\frac{4}{3}y=\frac{2}{3}$$
$$y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}$$
$$\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$$
$$y-\frac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$\therefore\ y=\dfrac{2}{3}\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

これを①'に代入して、

$$x=-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{10}}{3}\right)+2$$
$$=1\mp\frac{\sqrt{10}}{2}$$

(以上、すべて複号同順)

したがって、「①かつ②」の解は

$$\boxed{x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2},\ y=\frac{2\mp\sqrt{10}}{3}\quad (\text{複号同順})}$$

(3)

$$\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より、

$$y=-x+3 \cdots\cdots ①'$$

これを②に代入して、

$$x^2+(-x+3)^2=2$$

$$2x^2-6x+9=2$$

$$x^2-3x=-\frac{7}{2}$$

$$x^2-3x+\frac{9}{4}=-\frac{7}{2}+\frac{9}{4}$$

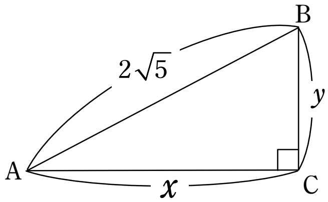
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{5}{4}$$

となるが、これをみたす実数 x は存在しない。

したがって、「①かつ②」をみたす実数 x, y の組も存在しない。つまり、

$\boxed{\text{①かつ②の解はなし}}$

H7.2



$\mathrm{AC}=x, \mathrm{BC}=y$ とおくと、 $\mathrm{AC}>\mathrm{BC}$ より

$$x>y \quad \cdots\cdots ①$$

である。斜辺の長さが $2\sqrt{5}$ なので、ピタゴラスの定理より、

$$x^2+y^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2,$$

$$\therefore x^2+y^2=20 \quad \cdots\cdots ②$$

また、面積が 3 なので、

$$\frac{1}{2}xy=3, \qquad \therefore xy=6 \quad \cdots\cdots ③$$

③より $y=\dfrac{6}{x}\cdots\cdots$ ③' なので、②に代入して

$$x^2+\left(\frac{6}{x}\right)^2=20, \qquad x^2+\frac{36}{x^2}=20$$

両辺に x^2 を掛けて、

$$(x^2)^2+36=20x^2$$

$$\therefore (x^2)^2-20x^2+36=0$$

を得る。まず、x^2 の値を求めると、

$$(x^2)^2-20x^2+100=-36+100$$

$$(x^2-10)^2=64$$

$$x^2-10=8, -8$$

$$\therefore x^2=18, 2$$

であり、$x>0$ なので、

$$x=3\sqrt{2}, \sqrt{2}$$

となる。③'より、

$x=3\sqrt{2}$ のとき $y=\dfrac{6}{3\sqrt{2}}=\dfrac{6\times\sqrt{2}}{3\times 2}=\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$ のとき $y=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=\dfrac{6\times\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

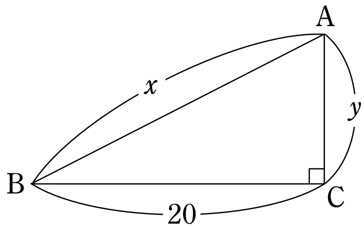
よって、

$$(x, y)=\left(3\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$$

となる。このうち、①を満たすのは $(x, y)=\left(3\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ なので、

$\boxed{\mathrm{AC}=3\sqrt{2}, \mathrm{BC}=\sqrt{2}}$

H7.3



ピタゴラスの定理より、

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AC}^2$$

$$x^2 = 20^2 + y^2 \quad \cdots\cdots ①$$

よって

$$x^2 - y^2 = 20^2$$

$$\therefore (x+y)(x-y) = 2^4 \times 5^2 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで、x, y は△ABC の辺の長さだから正であり、x は斜辺の長さだから（あるいは①より）$x > y$ である。したがって、$x+y, x-y$ は $x+y > x-y > 0$ をみたす整数であることに注意する。さらに $(x+y)+(x-y) = 2x$ が偶数であることから $x+y, x-y$ の偶奇が一致することにも注意すると、②より、

$$\begin{cases} x+y \\ x-y \end{cases} = \cancel{\begin{cases} 400 \\ 1 \end{cases}}, \begin{cases} 200 \\ 2 \end{cases}, \begin{cases} 100 \\ 4 \end{cases}, \cancel{\begin{cases} 80 \\ 5 \end{cases}}, \begin{cases} 50 \\ 8 \end{cases}, \begin{cases} 40 \\ 10 \end{cases}, \cancel{\begin{cases} 25 \\ 16 \end{cases}}, \cancel{\begin{cases} 20 \\ 20 \end{cases}}$$

したがって、

$$\boxed{(x, y) = (101, 99), (52, 48), (29, 21), (25, 15)}$$