中2数学C　2019年度1学期　宿題解答
§8　ピタゴラスの定理と計量

H8.1

(1)　$AH = a,\ BH = b,\ CH = c$ とおく。

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5^2 & (\triangle\text{ABHにピタゴラスの定理}) \cdots\cdots ① \\ a^2 + c^2 = 11^2 & (\triangle\text{ACHにピタゴラスの定理}) \cdots\cdots ② \\ b + c = 12 & (BC = 12) \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

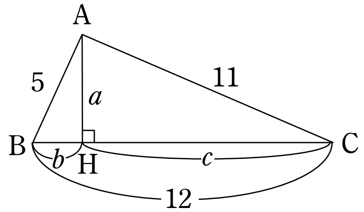
①−② より、$b^2 - c^2 = 5^2 - 11^2$

$(b+c)(b-c) = (5+11)(5-11)$

③を代入して、

$12(b-c) = 16 \times (-6)$

両辺を12で割って、$b - c = -8$　……④



$$\begin{cases} b + c = 12 \cdots\cdots ③ \\ b - c = -8 \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③＋④ より、$2b = 4$　$\therefore b = 2$（よって、BH=2）

①に代入して、$a^2 + 2^2 = 5^2$　$a^2 = 25 - 4 = 21$

$a > 0$ より、$AH = a = \boxed{\sqrt{21}}$

(2)　(1)より、$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times BC \times AH = \dfrac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{21} = \boxed{6\sqrt{21}}$

(3)　$\triangle ABC$ の内接円の半径を r とおき、内心を I とおく。

$\triangle ABC = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$ より、$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times (AB + BC + CA) \times r$ なので、

(2)より、$6\sqrt{21} = \dfrac{1}{2} \times (5 + 12 + 11) \times r$　$14r = 6\sqrt{21}$

$$\therefore\quad r = \frac{\cancel{6}^{3}\sqrt{21}}{\cancel{14}_{7}} = \boxed{\frac{3\sqrt{21}}{7}}$$

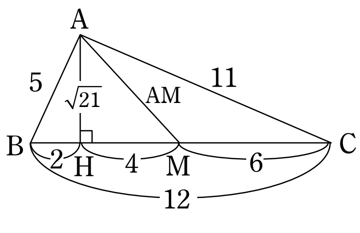
(4)　M は BC の中点なので、$BM = CM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

よって、$HM = BM - BH = 6 - b = 6 - 2 = 4$

$\triangle AHM$ にピタゴラスの定理を用いて、

$AM^2 = AH^2 + HM^2 = \sqrt{21}^2 + 4^2 = 21 + 16 = 37$

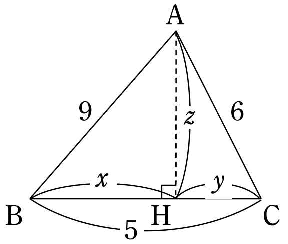
AM>0 より、$AM = \boxed{\sqrt{37}}$



H8.2

(1)　BH $= x$, HC $= y$, AH $= z$ とおく。

まず、右図のように、H が辺 BC 上にあるものとして考えてみる。



BC $= 5$ だから、

$x + y = 5$ ……………………………①

△ABH にピタゴラスの定理を用いて、

$x^2 + z^2 = 9^2$ ……………………………②

△ACH にピタゴラスの定理を用いて、

$y^2 + z^2 = 6^2$ ……………………………③

②−③ より、

$x^2 - y^2 = 9^2 - 6^2$

$(x + y)(x - y) = (9 + 6)(9 - 6)$ …④

①を代入して、

$5(x - y) = 15 \times 3$

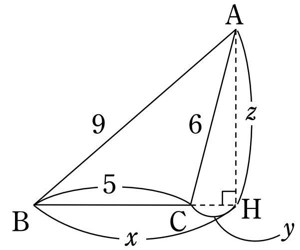
$\therefore\ x - y = 9$ ……………………………⑤

①+④ より、

$2x = 14,\quad \therefore x = 7$

ところが、この x の値は辺 BC の長さ 5 よりも長いので不適切である。

そこで、改めて、右図のように H が BC の延長上にあるものとすると、



BC $= 5$ だから、

$x - y = 5$ ……………………………⑥

この場合でも、まったく同様に②, ③が成り立ち、結果④が得られるので、⑥を代入すると、

$(x + y) \times 5 = 15 \times 3$

$\therefore\ x + y = 9$ ……………………………⑦

⑥+⑦ より、

$2x = 14,\quad \therefore x = 7$

と先ほどと同じ値が得られる。今度は x の値が辺 BC の長さ 5 よりも長いので、これは答として適切。よって、 BH $= \boxed{7}$ である。

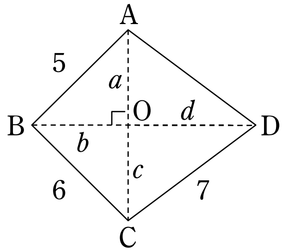
(2)　(1)で計算して分かった通り、A から BC に下した垂線の足は、BC の C 側の延長上にある。

したがって、△ABC は、

$\boxed{\text{∠Cが鈍角の鈍角三角形}}$

になっている。

H8.3



AC と BD の交点を O とおいて、

$$\mathrm{OA}=a, \mathrm{OB}=b, \mathrm{OC}=c, \mathrm{OD}=d$$

とする。

△OAB，△OBC，△OCD それぞれに
ピタゴラスの定理を用いて、

$$a^2+b^2=5^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$b^2+c^2=6^2 \quad \cdots\cdots ②$$

$$c^2+d^2=7^2 \quad \cdots\cdots ③$$

求めたい DA の長さについては、△ODA にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{DA}^2=a^2+d^2 \quad \cdots\cdots ④$$

となっている。そこで、a^2+d^2 を計算すると、①－②＋③ より、

$$\begin{aligned} a^2+d^2 &= (a^2+b^2)-(b^2+c^2)+(c^2+d^2) \\ &= 25-36+49 \\ &= 38 \end{aligned}$$

よって、④より

$$\mathrm{DA}^2=38$$

$$\therefore \mathrm{DA}=\boxed{\sqrt{38}} \ (>0)$$