

中2数学C 2019年1学期 宿題解答

§11 2点間の距離

H11.1

(1) A(1,3) から B(4,7) までの移動は、

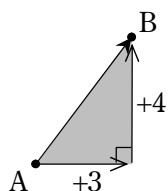
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

なので、ピタゴラスの定理より、

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} \\ = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

また、AB の傾きは、

$$\frac{(y \text{ 方向の移動量})}{(x \text{ 方向の移動量})} = \boxed{\frac{4}{3}}$$



(2) A(-3,1) から B(1,-5) までの移動は、

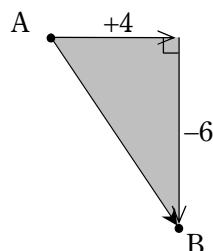
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

なので、

$$AB = \sqrt{4^2 + |-6|^2} \\ = \sqrt{4^2 + 6^2} \left(= \sqrt{4^2 + (-6)^2} \right) \\ = \sqrt{52} = \boxed{2\sqrt{13}}$$

また、AB の傾きは、

$$\frac{-6}{4} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$



(3) A(a,c) から B(b,d) までの移動は、

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b-a \\ d-c \end{pmatrix}$$

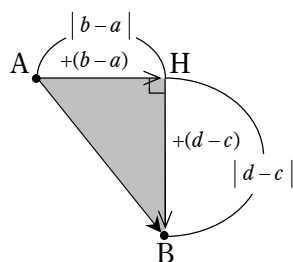
なので、

$$AB = \sqrt{(|b-a|)^2 + (|d-c|)^2} \\ = \boxed{\sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}}$$

また、 $a \neq b$ より $b-a \neq 0$ に注意して、

AB の傾きは、

$$\boxed{\frac{d-c}{b-a}}$$



H11.2

D を原点とし、直線 DC に沿って x 軸を、それに垂直に y 軸を設定する。

A, C の座標をそれぞれ、

$$A(a, b), C(c, 0)$$

とおく。

辺 AB は辺 OC と平行で長さが等しい、つまり A から B への

移動は O から C への移動 $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ と一致するから、B の座標は

$$(a+c, b+0) = (a+c, b)$$

となる。

このとき、4 辺の長さの 2 乗の和は、

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= 2(DA^2 + DC^2) \\ &= 2\{(a^2 + b^2) + c^2\} \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

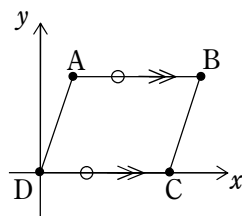
となる。一方、対角線の長さの 2 乗の和は、

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= \{(c-a)^2 + (0-b)^2\} + \{(a+c)^2 + b^2\} \\ &= (a^2 - 2ac + c^2 + b^2) + (a^2 + 2ac + c^2 + b^2) \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$

が成り立つことが示された。



H11.3

B を原点とし、直線 BC に沿って x 軸を、それに垂直に y 軸を設定する。

A の座標を

$$A(a, b) \quad (a, b > 0)$$

とおく。AB=AC より、A から BC x 軸に下ろした垂線の足 $(a, 0)$ は BC の中点と一致するから、C の座標は $C(2a, 0)$ となる。

AB の傾きは $\frac{b}{a}$ だから、AB に垂直な CD の傾きは $-\frac{a}{b}$ であり、

y 切片を g とおくと、直線 CD の式は

$$y = -\frac{a}{b}x + g$$

となる。C($2a, 0$) を通ることから、

$$0 = -\frac{a}{b} \times 2a + g, \quad \therefore g = \frac{2a^2}{b}$$

よって、直線 CD の式は

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{2a^2}{b} \quad \cdots \cdots \text{①}$$

一方、直線 AB の式は

$$y = \frac{b}{a}x \quad \cdots \cdots \text{②}$$

だから、①、②より、D の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{b}{a}x &= -\frac{a}{b}x + \frac{2a^2}{b} \\ \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)x &= \frac{2a^2}{b} \\ \frac{a^2 + b^2}{ab}x &= \frac{2a^2}{b} \\ x &= \frac{2a^2}{b} \times \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{2a^3}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

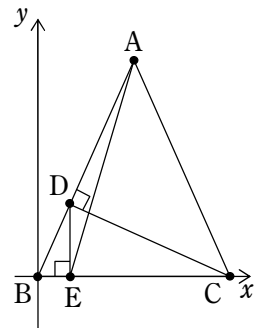
②に代入して、D の y 座標は

$$y = \frac{b}{a} \times \frac{2a^3}{a^2 + b^2} = \frac{2a^2b}{a^2 + b^2}$$

したがって、D, E の座標は、それぞれ

$$D\left(\frac{2a^3}{a^2 + b^2}, \frac{2a^2b}{a^2 + b^2}\right), \quad E\left(\frac{2a^3}{a^2 + b^2}, 0\right)$$

となる。



したがって、

$$\begin{aligned} \text{DE}^2 + \text{AE}^2 &= \left(\frac{2a^2b}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left\{ \left(\frac{2a^3}{a^2 + b^2} - a \right)^2 + (0 - b)^2 \right\} \\ &= \left(\frac{2a^2b}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{a^3 - ab^2}{a^2 + b^2} \right)^2 + b^2 \\ &= \frac{4a^4b^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{a^6 - 2a^4b^2 + a^2b^4}{(a^2 + b^2)^2} + b^2 \\ &= \frac{a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4}{(a^2 + b^2)^2} + b^2 \\ &= \frac{a^2(a^4 + 2a^2b^2 + b^4)}{(a^2 + b^2)^2} + b^2 \\ &= \frac{a^2(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} + b^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

となり、これは AB^2 と等しい。したがって、

$$\text{AB}^2 = \text{AE}^2 + \text{DE}^2$$

が成り立つことが示された。