# 中2数学X 2019年度1学期 本問解答
# §7 完全平方形

※ 欠席してしまった場合は、問 7.1, 問 7.2, 問 7.5〜問 7.7 を（余裕があれば問 7.3, 問 7.4 も）自分で確認し、p.6, p.7 の宿題 H7.1〜H7.5 に取り組んで提出してください。

## 問7.1

(1) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=\boxed{a^2+2ab+b^2}$

(2) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=\boxed{a^2-2ab+b^2}$

(1)の $b$ を $-b$ で置き替えたと考えてもよい。

## 問7.2

(1) $(x+3y)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2=\boxed{x^2+6xy+9y^2}$

(2) $(3x-2)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2+2^2=\boxed{9x^2-12x+4}$

(3) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{6}+2=\boxed{5+2\sqrt{6}}$

(4) $\left(3-\sqrt{5}\right)^2=3^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2=9-6\sqrt{5}+5=\boxed{14-6\sqrt{5}}$

## 問7.3

少し見通しよく、一般化して比較してみよう。正の数$a$に対し、

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+3}\right)^2 = a+2\sqrt{a(a+3)}+a+3 = 2a+3+2\sqrt{a^2+3a},$$

$$\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}\right)^2 = a+1+2\sqrt{(a+1)(a+2)}+a+2 = 2a+3+2\sqrt{a^2+3a+2}$$

より、

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+3}\right)^2 < \left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}\right)^2$$

である。$\sqrt{a}+\sqrt{a+3},\ \sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}$ は正なので、2 乗しても大小関係は変わらないから、

$$\sqrt{a}+\sqrt{a+3}<\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}$$

と分かる。

$a=2345$ を代入して、

$$\boxed{\sqrt{2345}+\sqrt{2348}<\sqrt{2346}+\sqrt{2347}}$$

## 問7.4

(1) 3 つとも正の数なので 2 乗しても大小関係は変わらない。

$$(n+1)^2=n^2+2n+1,$$

$$(n+2)^2=n^2+4n+4,$$

$$\left(\sqrt{n^2+4n}\right)^2=n^2+4n=(n^2+2n)+2n$$

で、$n \geqq 1$ だから、

$$(n+1)^2<\left(\sqrt{n^2+4n}\right)^2<(n+2)^2$$

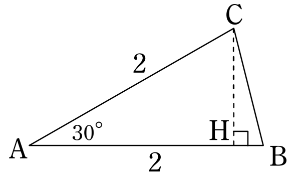
である。したがって、

$$\boxed{n+1<\sqrt{n^2+4n}<n+2}$$

(2) (1)より、$\sqrt{n^2+4n}=\sqrt{n(n+4)}$ は、連続する 2 つの自然数の間にあるので整数ではない。ゆえに、差が 4 の自然数の積の正の平方根$\sqrt{1\times5}$, $\sqrt{2\times6}$, $\sqrt{3\times7}$, … の中に整数になるものはない。

## 問7.5

(1) △ACH は$30°, 60°, 90°$の直角三角形だから、




$$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},\quad \mathrm{CH}=\mathrm{AC}\times\frac{1}{2}=1$$

したがって、

$$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}-\mathrm{AH}=\boxed{2-\sqrt{3}}$$

(2) △BCH にピタゴラスの定理を用いると、(1)および$\mathrm{CH}=\mathrm{AC}\times\frac{1}{2}=1$ より、

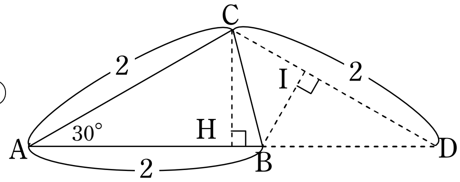
$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2\\&=\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1^2=2^2-4\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2+1=8-4\sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって、

$$\mathrm{BC}=\boxed{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}$$

## 問7.6

(1) $CA=CD$ より、 $\angle CDA=\angle CAB=30°$ だから、




$\triangle DBI$ は$30°, 60°, 90°$ の直角三角形であり、

$BD:BI=2:1$ ……………………………………………… ①

また、 $AB=AC$ より、

$$\angle ABC=\angle ACB=\frac{180°-\angle BAC}{2}=75°$$

だから、

$$\angle CBI=180°-\angle ABC-\angle DBI=180°-75°-60°=45°$$

よって、$\triangle CBI$ は直角二等辺三角形であり、

$BI:BC=1:\sqrt{2}$ ………………………………………… ②

①, ②より、

$$BD:BI:BC=2:1:\sqrt{2}, \qquad \therefore BD:BC=\boxed{2:\sqrt{2}}\left(=\boxed{\sqrt{2}:1}\right)$$

(2) C から AD へ下ろした垂線の足を H とすると、$CA=CD$ より、H は AD の中点と一致する。 $\triangle ACH$ は$30°, 60°, 90°$ の直角三角形となるから、

$$AH=AC\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}, \quad \therefore AD=2AH=2\sqrt{3}$$

したがって、

$$BD=AD-AB=2\sqrt{3}-2$$

これと(1)より、

$$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\left(\sqrt{3}-1\right)=\boxed{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

※ 問 3.7 と問 3.8 の結論の見た目は異なるが、

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2=6-2\sqrt{12}+2=8-4\sqrt{3}$$

より、同じ値を表していることが確かめられる。

## 問7.7

(1) 二重根号が外れて、

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

と表せるとする。

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}$$

なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{5+2\sqrt{6}}&=\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\\&=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

$$\therefore 5+2\sqrt{6}=a+b+2\sqrt{ab}$$

が成り立つ。そこで、

掛けて　6　足して　5

となる2数$a,b$を探してみると、3と2が見つかる。よって、

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}=1.7320\cdots+1.4142\cdots=\boxed{3.14}\cdots$$

(2) 二重根号が外れて、

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

と表せるとする。左辺は正の数なので、$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ も正の数であり、

$a>b$ ……………………………………☆

であることに注意する。

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2=a+b-2\sqrt{ab}$$

なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{7-2\times2\sqrt{3}}&=\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}\\&=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

$$\therefore 7-2\sqrt{12}=a+b-2\sqrt{ab}$$

が成り立つ。そこで、

掛けて　12　足して　7

となる2数$a,b$を探してみると、4と3が見つかる。よって、☆に注意して、

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}=2-1.7320\cdots=\boxed{0.26}\cdots$$