

中2数学X 2019年度1学期 本問解答

§8 相似

※ 欠席してしまった場合は、p.9の平行線と比の定理、p.10～p.11の相似（拡大）の定義、p.12の三角形の相似条件の定理をよく読んで、問8.5～問8.8を（余裕があれば問8.1～問8.4も）自分で確認し、p.18～p.19の宿題H8.1～H8.5に取り組んで提出してください。

問8.1

平行線が3本の場合を示せば十分である。

[仮定] $AP \parallel BQ \parallel CR$ ①

$AB=BC$ ②

[結論] $PQ=QR$

[証明] Bを通り、直線AP, CRと点X, Yで交わる直線を、

$PR \parallel XY$ ③

となるようにとる。

①, ③より、 $PQBX, QRYB$ は平行四辺形なので、

$PQ=XB, QR=BY$ ④

$\triangle BAX$ と $\triangle BCY$ において、

$\angle ABX = \angle CBY$ （対頂角定理）⑤

①より、

$\angle BAX = \angle BCY$ （錯角定理）⑥

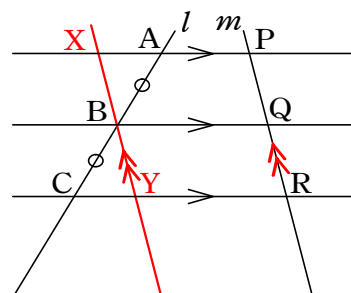
②, ⑤, ⑥より、

$\triangle BAX \equiv \triangle BCY$ （二角夾辺相等）⑦

⑦より、

$XB=YB$ （合同の対応辺）⑧

④, ⑧より、 $PQ=QR$ (q.e.d.)



問8.2

(1)

[仮定]

$BC \parallel DE$ ①

[結論]

$AD : AB = DE : BC$

[証明]

D を通り、AC に平行な直線を引き、BC との交点を F とする。すなわち、

$DF \parallel AC$ ②

②より $AD : AB = FC : BC$

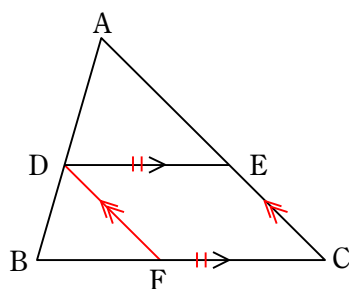
(平行線と比の定理その1)③

①,②より、2組の向かい合う辺が平行なので、

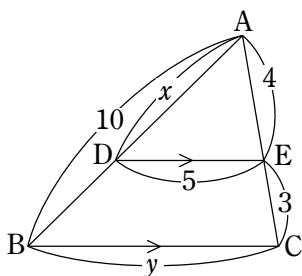
DECF は平行四辺形.....④

④より $FC = DE$ ⑤

③,⑤より $AD : AB = DE : BC$ (q.e.d.)



(2)



$BC \parallel DE$ より、

$AD : AB = AE : AC$ (平行線と比の定理)

$$x : 10 = 4 : (4 + 3)$$

$$\therefore x = 10 \times \frac{4}{7} = \boxed{\frac{40}{7}}$$

$AE : AC = DE : BC$ (平行線と比の定理)

$$4 : (4 + 3) = 5 : y$$

$$\therefore y = 5 \times \frac{7}{4} = \boxed{\frac{35}{4}}$$

問8.3

[仮定]

$$OA:OA' = 1:k \quad \text{.....①}$$

$$OB:OB' = 1:k \quad \text{.....②}$$

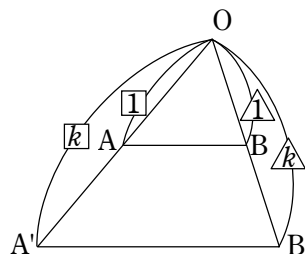
このとき、確認すべき結論は次のようになる。

[結論]

$$A'B' = kAB$$

$$AB \parallel A'B'$$

$$\angle OAB = \angle OA'B', \angle OBA = \angle OB'A'$$



[証明]

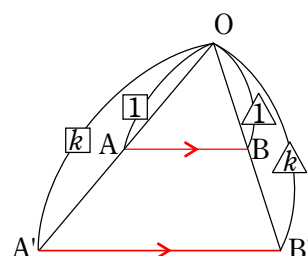
$$\text{①,②より、 } OA:OA' = OB:OB' \quad \text{.....③}$$

③より、平行線と線分比の定理を用いて

$$\boxed{AB \parallel A'B'} \quad \text{.....④}$$

④より、同位角は等しくなるから、

$$\boxed{\angle OAB = \angle OA'B', \angle OBA = \angle OB'A'}$$



さらに、④より、平行線と線分比の定理を用いて

$$OA:OA' = AB:A'B' \quad \text{.....⑤}$$

$$\text{①,⑤より、 } \boxed{A'B' = kAB}$$

(q.e.d.)

問8.4

どの条件の証明も、相似拡大したものと合同になることを示すという点では同様なので、
(2)はきちんと証明し、(1)(3)は略証を書く。

(2) **二辺比夾角相等**: $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ において、

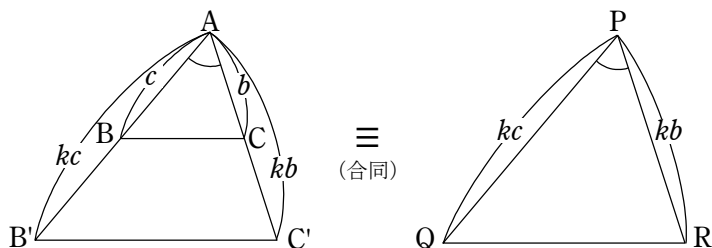
$\angle A = \angle P, AB:AC = PQ:PR$ ならば $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

[仮定]

$\angle A = \angle P$ ①

$AB:AC = PQ:PR$ ②

[結論] $\triangle ABC \sim \triangle PQR$



[証明]

②より、 $AB:PQ = AC:PR$ 、すなわち、 $\frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC}$ ($=k$ とおく) なので、

$\triangle ABC$ を、頂点 A を中心として、 $k \left(= \frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} \right)$ 倍に相似拡大して得られる三角形を

$\triangle AB'C'$ とおくと、 $\triangle AB'C'$ と $\triangle PQR$ において、

$AB' = AB \times k = PQ$ ③

$AC' = AC \times k = PR$ ④

$\angle A' = \angle A = \angle P$ (①より) ⑤

③④⑤より、 $\triangle AB'C' \equiv \triangle PQR$ (二辺夾角相等)

したがって、 $\triangle PQR$ は、 $\triangle ABC$ の相似拡大である $\triangle AB'C'$ と合同なので、
 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

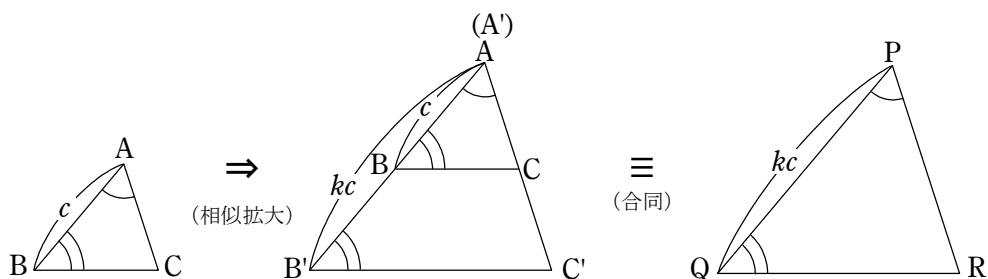
である。

(q.e.d.)

- (1) **二角相等**: $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ において、
 $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ ならば $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

[略証]

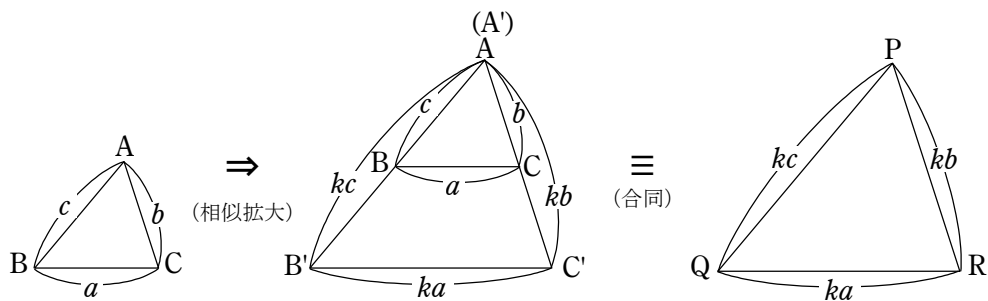
$\triangle ABC$ を、頂点 A を中心として、 $\frac{PQ}{AB}$ ($=k$ とおく) 倍に相似拡大して得られる三角形を $\triangle AB'C'$ とおくと、 $\triangle AB'C'$ と $\triangle PQR$ において、相似拡大の対応定理より、
 $\angle B' = \angle B$ が成り立ち、仮定より、 $\angle A = \angle P, \angle B' = \angle B = \angle Q$
したがって、二角夾辺相等より $\triangle AB'C' \equiv \triangle PQR$ となり、
 $\triangle PQR$ は、 $\triangle ABC$ の相似拡大である $\triangle AB'C'$ と合同なので、 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ である。



- (3) **三辺比相等**: $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ において、
 $AB : BC : CA = PQ : QR : RP$ ならば $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

[略証]

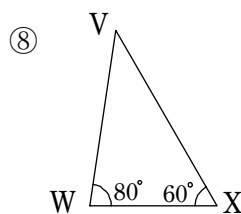
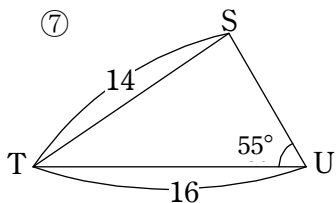
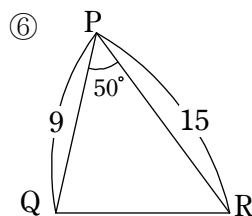
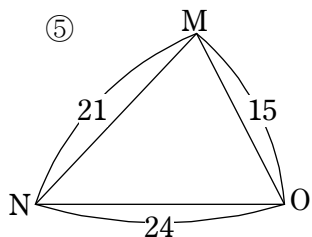
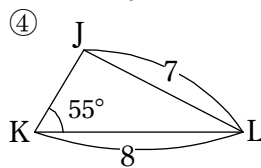
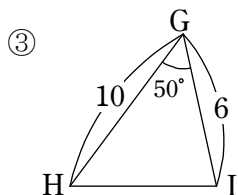
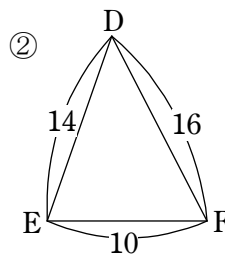
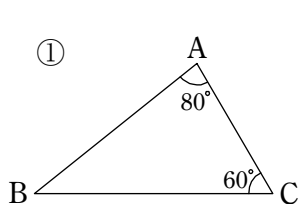
仮定より、 $AB : PQ = AC : PR = BC : QR$ 、すなわち、 $\frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC}$ ($=k$ とおく) なので、
 $\triangle ABC$ を、頂点 A を中心として、 $k \left(= \frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC} \right)$ 倍に相似拡大して得られる
三角形を $\triangle AB'C'$ とおくと、 $\triangle AB'C'$ と $\triangle PQR$ において、 $AB' = PQ, AC' = PR, B'C' = QR$
したがって、三辺相等より $\triangle AB'C' \equiv \triangle PQR$ となり、
 $\triangle PQR$ は、 $\triangle ABC$ の相似拡大である $\triangle AB'C'$ と合同なので、 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ である。



問8.5

① $\circ$ ⑧ (二角相等)、② $\circ$ ⑤ (三辺比相等)、③ $\circ$ ⑥ (二辺比夾角相等)

※ ④と⑦は、互いに等しい角が、対応する比が等しい二辺の夾角ではないので、相似とは限らない。



問8.6

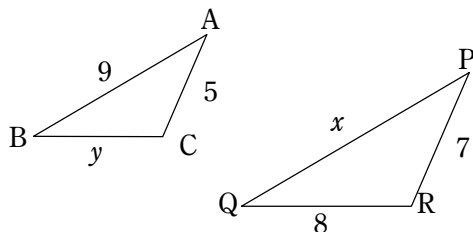
$\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ より、 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (二角相等) なので、
対応辺の比を考える。

- (1) $AB:PQ=AC:PR$ (対応辺の比) より、

$$9:x=5:7 \text{ なので、} x=9 \times \frac{7}{5} = \boxed{\frac{63}{5}}$$

- $BC:QR=AC:PR$ (対応辺の比) より、

$$y:8=5:7 \text{ なので、} y=8 \times \frac{5}{7} = \boxed{\frac{40}{7}}$$

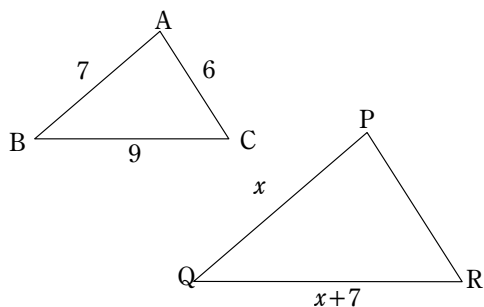


- (2) $AB:PQ=BC:QR$ (対応辺の比) より、

$$7:x=9:(x+7) \text{ なので、}$$

$$9x=7(x+7)$$

$$9x=7x+49 \quad \therefore x=\boxed{\frac{49}{2}}$$

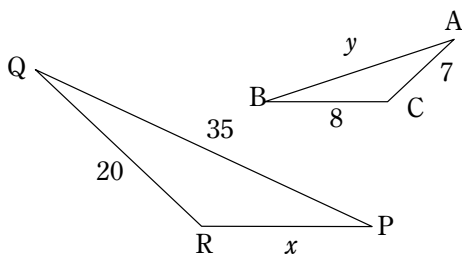


- (3) $AC:PR=BC:QR$ (対応辺の比) より、

$$7:x=8:20 \text{ なので、} x=7 \times \frac{20}{8} = \boxed{\frac{35}{2}}$$

- $AB:PQ=BC:QR$ (対応辺の比) より、

$$y:35=8:20 \text{ なので、} y=35 \times \frac{8}{20} = \boxed{14}$$

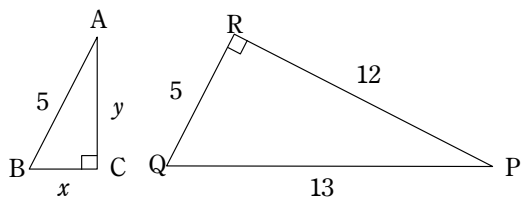


- (4) $AB:PQ=BC:QR$ (対応辺の比) より、

$$5:13=x:5 \text{ なので、} x=5 \times \frac{5}{13} = \boxed{\frac{25}{13}}$$

- $AB:PQ=AC:PR$ (対応辺の比) より、

$$5:13=y:12 \text{ なので、} y=12 \times \frac{5}{13} = \boxed{\frac{60}{13}}$$



問8.7

(1)

[仮定]

$$\angle A = 90^\circ \dots\dots\dots ①$$

$$AH \perp BC \dots\dots\dots ②$$

[結論] $\triangle ABC \sim \triangle HBA \sim \triangle HAC$

[証明]

$\triangle ABC$ と $\triangle HBA$ において

$$\text{共通なので } \angle ABC = \angle HBA \dots\dots\dots ③$$

$$\text{①, ②より } \angle BAC = \angle BHA \dots\dots\dots ④$$

$$\text{③, ④より } \triangle ABC \sim \triangle HBA \text{ (二角相等) } \dots\dots ⑤$$

$\triangle ABC$ と $\triangle HAC$ において

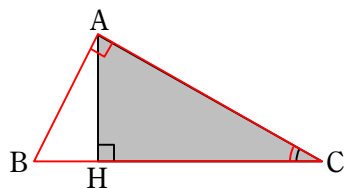
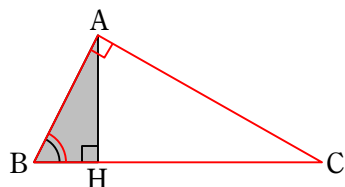
$$\text{共通なので } \angle ACB = \angle HCA \dots\dots\dots ⑥$$

$$\text{①, ②より } \angle BAC = \angle AHC \dots\dots\dots ⑦$$

$$\text{⑥, ⑦より } \triangle ABC \sim \triangle HAC \text{ (二角相等) } \dots\dots ⑧$$

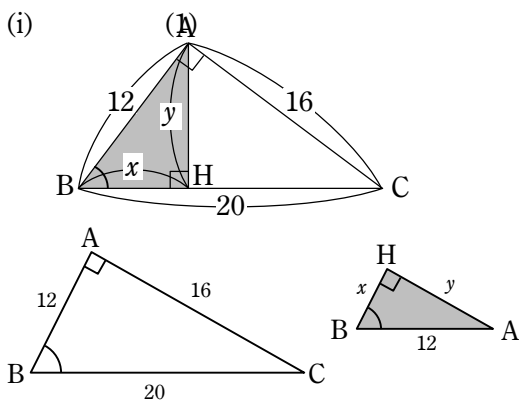
$$\text{⑤, ⑧より } \triangle ABC \sim \triangle HBA \sim \triangle HAC$$

(q.e.d.)



(2)

(i)



$\triangle ABH \sim \triangle CBA$ (二角相等) より、

$$AB : BH = CB : BA \text{ (対応辺の比)}$$

$$12 : x = 20 : 12$$

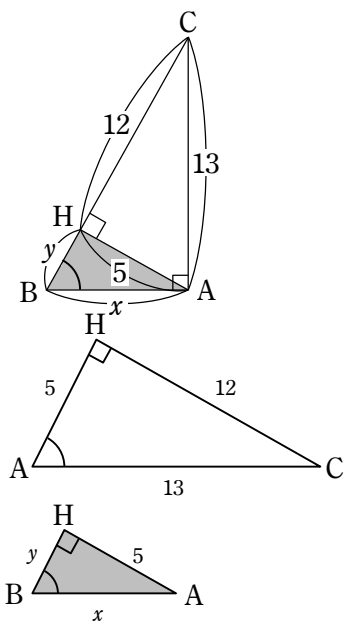
$$\therefore x = 12 \times \frac{12}{20} = \frac{36}{5}$$

$AB : AH = CB : CA$ (対応辺の比)

$$12 : y = 20 : 16$$

$$y = 12 \times \frac{16}{20} = \frac{48}{5}$$

(ii)



$\triangle AHC \sim \triangle BHA$ (二角相等) より、
 $AC : CH = BA : AH$ (対応辺の比)

$$13 : 12 = x : 5$$

$$\therefore x = 5 \times \frac{13}{12} = \boxed{\frac{65}{12}}$$

$AH : CH = BH : AH$ (対応辺の比)

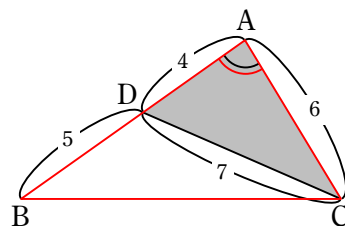
$$5 : 12 = y : 5$$

$$\therefore y = 5 \times \frac{5}{12} = \boxed{\frac{25}{12}}$$

問8.8

(1) [結論] $\angle ACD = \angle ABC$

結論から考えれば、二角相等で $\triangle ACD$ と $\triangle ABC$ が相似になっていることが分かる。そこで辺の長さを利用して、この相似を証明してしまうことにしよう。



[証明]

$\triangle ACD$ と $\triangle ABC$ において

$$AC : AD = 6 : 4 = 3 : 2 \dots\dots\dots ①$$

$$AB : AC = 9 : 6 = 3 : 2 \dots\dots\dots ②$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \quad AC : AD = AB : AC \dots\dots\dots ③$$

$$\text{共通なので} \quad \angle CAD = \angle BAC \dots\dots\dots ④$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{より} \quad \triangle ACD \sim \triangle ABC \quad (\text{二辺比夾角相等}) \dots\dots\dots ⑤$$

$$\textcircled{5} \text{より} \quad \angle ACD = \angle ABC \quad (\text{対応角}) \qquad \qquad \qquad (\text{q.e.d.})$$

(2)

$$\textcircled{4} \text{より} \quad AC : AB = CD : BC \quad (\text{対応辺の比})$$

$$\text{よって} \quad 6 : 9 = 7 : x$$

$$\therefore x = 7 \times \frac{9}{6} = \boxed{\frac{21}{2}}$$

