

中2数学X 2019年度1学期 本問解答

§10 方程式の応用

※ 欠席してしまった場合は、問 10.3, 問 10.4 を（余裕があれば問 10.1, 問 10.5 も）自分で確認し、p.28, 29 の宿題 H10.1～H10.5 に取り組んで提出してください。

問10.1

$AC = x$ とおく。

$$BC = PC = AC + AP = x + 10, AB = 70, \angle BAC = 90^\circ$$

なので、 $\triangle ABC$ にピタゴラスの定理を用いて、

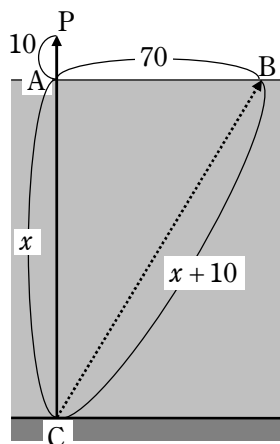
$$(x+10)^2 = x^2 + 70^2$$

$$\cancel{x^2} + 20x + 100 = \cancel{x^2} + 4900$$

$$20x = 4900 - 100 = 4800$$

$$\therefore x = 4800 \times \frac{1}{20} = 240$$

よって、堀の水深は 240cm



問10.2

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7^2 & (\triangle ABH \text{ にピタゴラスの定理}) \dots\dots ① \\ a^2 + c^2 = 9^2 & (\triangle ACH \text{ にピタゴラスの定理}) \dots\dots ② \\ b + c = 8 & (BC = 8) \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$① - ② \text{ より、 } b^2 - c^2 = 7^2 - 9^2 \dots\dots ④$$

(方針Ⅰ)

③より、 $c = 8 - b \dots\dots \star$ なので、

④に $\star$ を代入して、

$$b^2 - (8 - b)^2 = 7^2 - 9^2$$

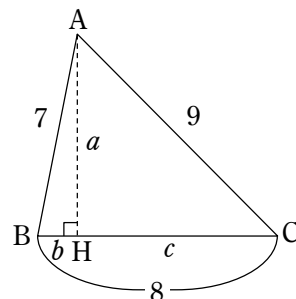
$$b^2 - (64 - 16b + b^2) = (7 + 9)(7 - 9)$$

$$\cancel{b^2} - 64 + 16b - \cancel{b^2} = 16 \times (-2)$$

$$16b = -32 + 64 = 32 \quad \therefore b = 2$$

$$① \text{ に代入して、 } a^2 + 2^2 = 7^2 \quad a^2 = 49 - 4 = 45$$

$$a > 0 \text{ より、 } AH = a = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}}, \quad BH = b = \boxed{2}, \quad CH = c = 8 - b = \boxed{6}$$



(方針Ⅱ)

$$④ \text{ より、 } (b+c)(b-c) = (7+9)(7-9)$$

$$③ \text{ を代入して、 } 8(b-c) = 16 \times (-2)$$

$$\text{両辺を8で割って、 } b - c = -4 \dots\dots ⑤$$

$$\begin{cases} b + c = 8 & \dots\dots ③ \\ b - c = -4 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + c = 8 & \dots\dots ③ \\ b - c = -4 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$③ + ⑤ \text{ より、 } 2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

問10.3

(1) $AH = a, BH = b, CH = c$ とおく。

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5^2 & (\triangle ABH \text{ にピタゴラスの定理}) \dots\dots ① \\ a^2 + c^2 = 7^2 & (\triangle ACH \text{ にピタゴラスの定理}) \dots\dots ② \\ b + c = 6 & (BC = 6) \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$① - ② \text{ より、 } b^2 - c^2 = 5^2 - 7^2 \dots\dots ④$$

(方針Ⅰ)

③より、 $c = 6 - b \dots\dots \star$ なので、

④に $\star$ を代入して、

$$b^2 - (6 - b)^2 = 5^2 - 7^2$$

$$b^2 - (36 - 12b + b^2) = (5 + 7)(5 - 7)$$

$$\cancel{b^2} - 36 + 12b - \cancel{b^2} = 12 \times (-2)$$

$$12b = -24 + 36 = 12 \quad \therefore b = 1$$

(よって、 $BH = 1$)

$$① \text{ に代入して、 } a^2 + 1^2 = 5^2 \quad a^2 = 25 - 1 = 24$$

$$a > 0 \text{ より、 } AH = a = \sqrt{24} = \boxed{2\sqrt{6}}$$

$$(2) \text{ (i) } (1) \text{ より、 } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{6} = \boxed{6\sqrt{6}}$$

(ii) $\triangle ABC$ の内接円の半径を r とおき、内心を I とおく。

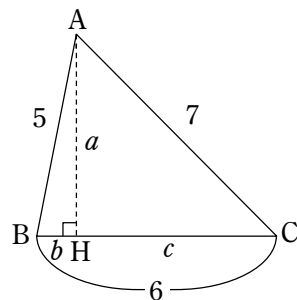
$\triangle ABC = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$ より、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (AB + BC + CA) \times r \text{ なので、}$$

$$(i) \text{ より、 } 6\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times (5 + 6 + 7) \times r$$

$$9r = 6\sqrt{6}$$

$$\therefore r = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{6}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$



(方針Ⅱ)

$$④ \text{ より、 } (b + c)(b - c) = (5 + 7)(5 - 7)$$

$$③ \text{ を代入して、 } 6(b - c) = 12 \times (-2)$$

$$\text{両辺を6で割って、 } b - c = -4 \dots\dots ⑤$$

$$\begin{cases} b + c = 6 & \dots\dots ③ \\ b - c = -4 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + c = 6 & \dots\dots ③ \\ b - c = -4 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$③ + ⑤ \text{ より、 } 2b = 2 \quad \therefore b = 1$$

(よって、 $BH = 1$)

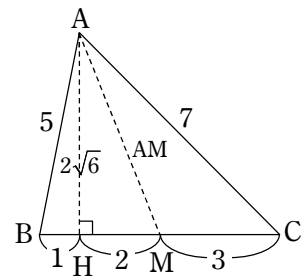
(3) (i) M は BC の中点なので、 $BM = CM = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3$

よって、 $HM = BM - BH = 3 - 1 = 2$

△AHM にピタゴラスの定理を用いて、

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 = (2\sqrt{6})^2 + 2^2 = 24 + 4 = 28$$

$$AM > 0 \text{ より、 } AM = \sqrt{28} = \boxed{2\sqrt{7}}$$



(ii) AD は ∠BAC の 2 等分線なので、

$$BD : DC = AB : AC = 5 : 7$$

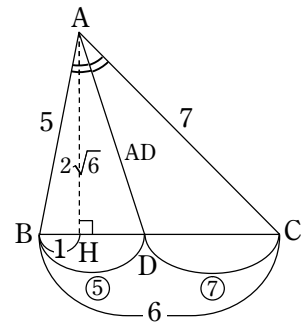
$$\text{よって、 } BD = BC \times \frac{BD}{BD + DC} = 6 \times \frac{5}{5 + 7} = \frac{5}{2}$$

$$HD = BD - BH = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$$

△AHD にピタゴラスの定理を用いて、

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 = (2\sqrt{6})^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 24 + \frac{9}{4} = \frac{105}{4}$$

$$AD > 0 \text{ より、 } AD = \sqrt{\frac{105}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{105}}{2}}$$



問10.4

長方形の縦と横の長さの差が3なので、それらを $x, x+3$ とおく。

すると、面積が9なので、

$$x(x+3)=9$$

$$\therefore x^2+3x=9 \quad \dots\dots ①$$

が成り立つ。

①を解き、縦と横の長さを明らかにしてから対角線の長さを求めてもよいが、やや面倒である。対角線の長さを l とすると、ピタゴラスの定理より、

$$l^2 = x^2 + (x+3)^2$$

$$= 2x^2 + 6x + 9$$

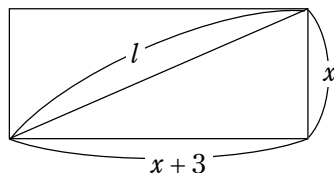
$$= 2(x^2 + 3x) + 9$$

となるから、ここに①を代入すれば、

$$l^2 = 2 \times 9 + 9 = 27, \quad \therefore l = \boxed{3\sqrt{3}} (>0)$$

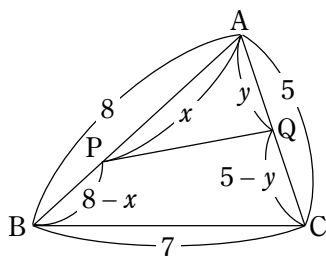
となる。

(縦と横の長さの差を3に保ったまま、長方形の面積はいくらでも小さくできるし、いくらでも大きくできる。連続的に変形することで、面積をちょうど9にすることも、直感的に納得できるであろう。そこで、①の $x > 0$ なる解が存在することは認めることにする。)



※ ①の $x > 0$ なる解を求めると、 $x = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$ である。

問10.5



$AP = x, AQ = y$ とおく。

$\triangle APQ$ と四角形 $PBCQ$ の周の長さが等しいことに注目すると、

$$AP + \cancel{PQ} + QA = PB + BC + CQ + \cancel{PQ}$$

なので、

$$x + y = (8 - x) + 7 + (5 - y)$$

$$2x + 2y = 20$$

$$\therefore x + y = 10 \dots\dots\dots ①$$

が成り立つ。

次に、 $\triangle APQ$ と四角形 $PBCQ$ は面積が等しいことから、 $\triangle APQ$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{2}$ となることに注目すると、

$$\begin{aligned} \triangle APQ &= \frac{AP}{AB} \times \frac{AQ}{AC} \times \triangle ABC \\ &= \frac{x}{8} \times \frac{y}{5} \times \triangle ABC \end{aligned}$$

なので、

$$\frac{x}{8} \times \frac{y}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore xy = 20 \dots\dots\dots ②$$

が成り立つ。

①より

$$y = -x + 10 \dots\dots\dots ①'$$

①'を②に代入すると、

$$x(-x + 10) = 20$$

$$-x^2 + 10x = 20$$

$$x^2 - 10x + 20 = 0$$

と、 x の 2 次方程式を得る。

これを解くと、

$$x^2 - 10x = -20$$

$$x^2 - 10x + 25 = -20 + 25$$

$$(x - 5)^2 = 5$$

$$x - 5 = \pm\sqrt{5}$$

$$\therefore x = 5 \pm \sqrt{5}$$

これを①'に代入して、

$$y = -(5 \pm \sqrt{5}) + 10$$

$$= -5 \mp \sqrt{5} + 10 = 5 \mp \sqrt{5}$$

(以上、すべて複号同順)

いま、 $AP = x, AQ = y$ なので、

$$0 < x < 8, \quad 0 < y < 5$$

を満たしていることから、

$$x = 5 + \sqrt{5}, y = 5 - \sqrt{5}$$

と分かる。($0 < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$ に注意。) 以上より、

$$\boxed{AP = 5 + \sqrt{5}, AQ = 5 - \sqrt{5}}$$

である。