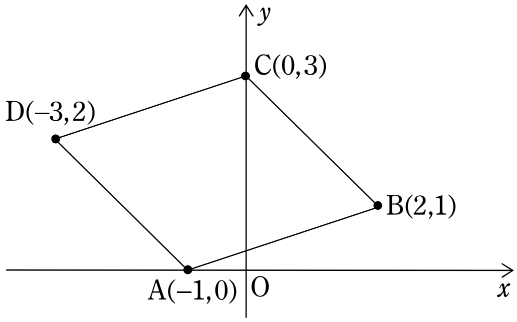
中2数学X 2019年度1学期 本問解答
§12 点の移動

※ 欠席してしまった場合は、問 12.1〜問 12.4 を（余裕があれば問 12.5 も）自分で確認しましょう。

問12.1



四角形が平行四辺形となる条件を(定義を含めて) 5 つ覚えているだろうか。

(ア) 向い合う 2 組の辺が平行。
(イ) 向い合う 2 組の辺が等しい。
(ウ) 向い合う 2 組の角が等しい。
(エ) 対角線が互いに他を 2 等分する。
(オ) 向い合う 1 組の辺が平行かつ等しい。

(ウ)以外の 4 つは、以下のように座標計算で簡単に示せる。

(ア) A から B へは、
x 方向に $2-(-1)=3$,
y 方向に $1-0=1$
だけ平行移動している。……………………… ①

D から C へは、
x 方向に $0-(-3)=3$,
y 方向に $3-2=1$
だけ平行移動している。……………………… ②

A から D へは、
x 方向に $-3-(-1)=-2$,
y 方向に $2-0=2$
だけ平行移動している。……………………… ③

B から C へは、
x 方向に $0-2=-2$,
y 方向に $3-1=2$
だけ平行移動している。…………………… ④

①, ②より、AB の傾きも DC の傾きも $\frac{1}{3}$ であるので、 AB // DC と分かる。
また、③, ④より、AD の傾きも BC の傾きも $\frac{2}{-2}=-1$ であるので、 AD // BC と分かる。
したがって、ABCD は向い合う 2 組の辺が平行だから平行四辺形である。

(イ) ①, ②より、AB の長さも DC の長さも
$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$
と分かる。
また、③, ④より、AD の長さも BC の長さも
$\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
と分かる。
したがって、ABCD は向い合う 2 組の辺が等しいので平行四辺形である。

(エ) 線分 AC の中点は、
$$\left(\frac{-1+0}{2},\frac{0+3}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$
であり、線分 BD の中点は、
$$\left(\frac{2+(-3)}{2},\frac{1+2}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$
である。
これらは一致するから、ABCD の 2 本の対角線がそれぞれの中点で交わっていることが分かる。したがって、ABCD は平行四辺形である。

(オ) ①, ②より、AB の傾きも DC の傾きも $\dfrac{1}{3}$

であるので、 AB // DC と分かる。

さらに、①, ②より、AB の長さも DC の長さも

$$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

と分かる。

したがって、ABCD は向い合う 1 組の辺が平行かつ等しいので平行四辺形である。

なお、AB // DC かつ AB=DC であることを確認するには、①,②から傾きと長さを計算せずとも、

A から B への移動(変位)と
D から C への移動(変位)が
一致している

ことだけをみれば(①, ②そのもので)十分であると分かるだろう。

以下、例えば、①を「A から B への移動は

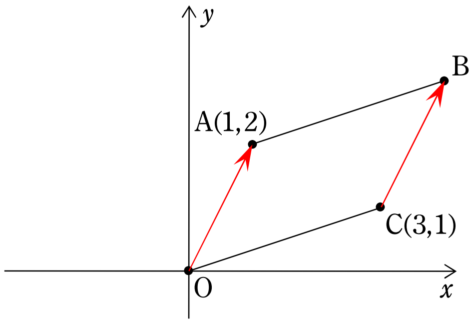
$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2-(-1)\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

である」のように表現することにする。

（$\overrightarrow{AB}$ は「ベクトル AB」と読む。）

問12.2

(1)



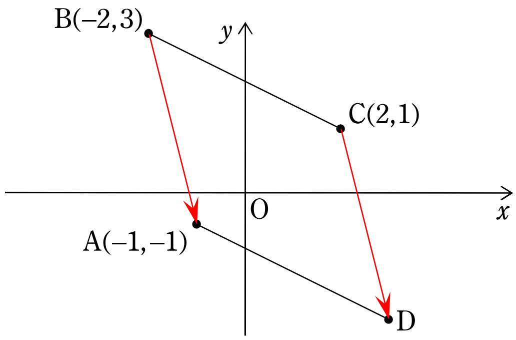
B は、C (3,1) から

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

だけ移動した点なので、その座標は

$$(3+1,1+2)=\boxed{(4,3)}$$

(2)



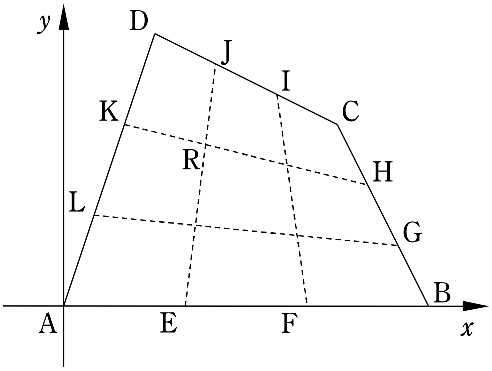
D は、C (2,1) から

$$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-1-(-2)\\-1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$$

だけ移動した点なので、その座標は

$$(2+1,1+(-4))=\boxed{(3,-3)}$$

問12.3



(1) まず、E, F の座標が

$\boxed{E(4,0)}$, $\boxed{F(8,0)}$

であることがわかる。次に、A から K までの移動は、A から D までの移動

$$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$$

の $\dfrac{2}{3}$ 倍と考えられるから、

$$\overrightarrow{AK}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times 3\\ \frac{2}{3}\times 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

（このことを

$$\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

と書いてよい。）

K は原点 A からこれだけ移動した点なので、その座標は $\boxed{K(2,6)}$

同様に、L は原点 A から

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

だけ移動した点なので、その座標は

$\boxed{L(1,3)}$

(2) B から C への移動は

$$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}9-12\\6-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$$

である。B から G への移動はこの $\dfrac{1}{3}$ 倍で

$$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

G はB(12,0) からこれだけ移動した点なので、その座標は $(12+(-1),0+2)$ 、 つまり $\boxed{G(11,2)}$

同様に、H はB(12,0) から

$$\overrightarrow{BH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$$

だけ移動した点なので、その座標は $(12-2,0+4)$、 つまり $\boxed{H(10,4)}$

C から D への移動は

$$\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}3-9\\9-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$$

である。C から I への移動はこの $\dfrac{1}{3}$ 倍で

$$\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

I はC(9,6) からこれだけ移動した点なので、その座標は $(9-2,6+1)$ 、 つまり $\boxed{I(7,7)}$

同様に、J はC(9,6) から

$$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$$

だけ移動した点なので、その座標は $(9-4,6+2)$、 つまり $\boxed{J(5,8)}$

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{KH}}=\begin{pmatrix}10-2\\4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$$

で、K から P への移動はこの$\dfrac{1}{3}$倍だから

$$\overrightarrow{\mathrm{KP}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

P は K(2,6) からこれだけ移動した点なので、その座標は

$$\left(2+\frac{8}{3},6-\frac{2}{3}\right)=\boxed{\left(\frac{14}{3},\frac{16}{3}\right)}$$

(4)

$$\overrightarrow{\mathrm{JE}}=\begin{pmatrix}4-5\\0-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}$$

で、J から Q への移動はこの$\dfrac{1}{3}$倍だから

$$\overrightarrow{\mathrm{JQ}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

Q は J(5,8) からこれだけ移動した点なので、その座標は

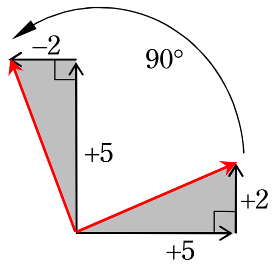
$$\left(5-\frac{1}{3},8-\frac{8}{3}\right)=\boxed{\left(\frac{14}{3},\frac{16}{3}\right)}$$

(5) P と Q が一致したので、これが KH と JE の交点 R に他ならない。$\boxed{\mathrm{R}\left(\frac{14}{3},\frac{16}{3}\right)}$

問12.4

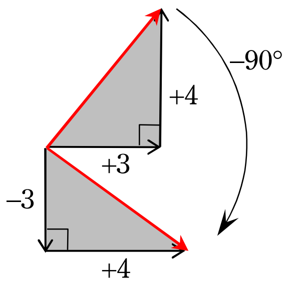
(1) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ を反時計回りに 90° 回転した移動

は、$\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}}$ である。



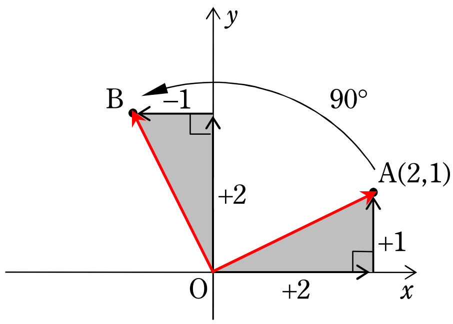
(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を時計回りに 90° 回転した移動は、

$\boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}$ である。



一般に、移動 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を反時計回りに 90° 回転した移動は、$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ となり、時計回りに 90° 回転した移動は、$\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ となる。

(3) A(2,1) を原点を中心として反時計回りに 90° 回転した点 B の座標は $\boxed{(-1,2)}$ である。



(4) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を時計回りに 90° 回転した移動である。
ここで、

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

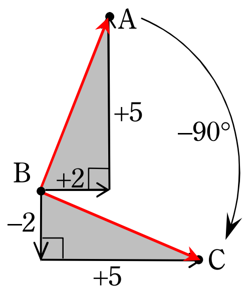
だから、

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

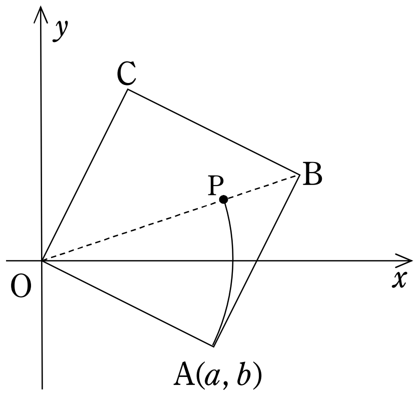
となる。C は、B(2,2) からこれだけ移動した点だから、その座標は、

$$(2+5, 2-2) = \boxed{(7,0)}$$

である。



問12.5



(1) C は、A を原点 O を中心として反時計回りに90° 回転した点なので、その座標は

$$\boxed{C(-b, a)}$$

である。また、$\overrightarrow{AB}$ は

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

と一致する。B は、$A(a, b)$ からこれだけ移動した点なので、その座標は

$$(a + (-b), b + a) = \boxed{(a - b, a + b)}$$

である。

(2) $\triangle OAB$ は $\angle A = 90°$ の直角二等辺三角形だから、$OB = \sqrt{2}\,OA$ である。これより、

$$OP = OA = \frac{1}{\sqrt{2}} OB$$

となる。P は線分 OB 上の点だから、移動としても、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{OB}$$

が成り立ち、P の座標は、$\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}, \dfrac{a+b}{\sqrt{2}} \right)$

つまり

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}(a-b)}{2}, \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2} \right)}$$

である。