中2数学X　2019年度1学期　宿題解答
§9　平方完成と2次方程式

H9.1

(1)　平方完成 $x^2+10x+25=(x+5)^2$ を利用して、

$$\begin{aligned} x^2+10x+1&=0 \\ x^2+10x+25&=24 \\ (x+5)^2&=24 \\ x+5&=2\sqrt{6},-2\sqrt{6} \end{aligned}$$

よって、$\boxed{x=-5+2\sqrt{6},-5-2\sqrt{6}}$

(2)　平方完成 $x^2-6x+9=(x-3)^2$ を利用して、

$$\begin{aligned} x^2-6x+7&=0 \\ x^2-6x+9&=2 \\ (x-3)^2&=2 \\ x-3&=\sqrt{2},-\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって、$\boxed{x=3+\sqrt{2},\ 3-\sqrt{2}}$

(3)　両辺を 4 で割って、

$$x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}=0$$

の形に整理すると、

$$\begin{aligned} 4x^2-8x+3&=0 \\ x^2-2x+\frac{3}{4}&=0 \end{aligned}$$

平方完成 $x^2-2x+1=(x-1)^2$ を利用して、

$$\begin{aligned} x^2-2x+1&=\frac{1}{4} \\ (x-1)^2&=\frac{1}{4} \\ x-1&=\frac{1}{2},-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

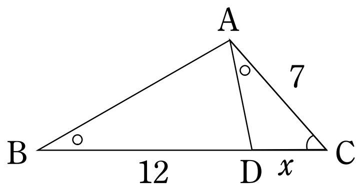
よって、$x=1+\dfrac{1}{2},1-\dfrac{1}{2}$ なので、$\boxed{x=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}}$

(4)　平方完成 $x^2-4\sqrt{3}x+12=\left(x-2\sqrt{3}\right)^2$ を利用して、

$$x^2-4\sqrt{3}x+8=0$$
$$x^2-4\sqrt{3}x+12=4$$
$$\left(x-2\sqrt{3}\right)^2=4$$
$$x-2\sqrt{3}=2,-2$$

よって、$\boxed{x=2\sqrt{3}+2,2\sqrt{3}-2}$

H9.2



△ABC と△DAC について、

$\angle ABC=\angle DAC$　(仮定)

$\angle ACB=\angle DCA$　(共通)

だから、二角相等で

△ABC ∽ △DAC

である。よって、対応辺を考え、

$BC:CA=AC:CD$

$CD=x$ とおくと、

$$(12+x):7=7:x$$
$$\frac{12+x}{7}=\frac{7}{x}$$
$$(12+x)x=7\times 7$$
$$\therefore\ x^2+12x=49\cdots\cdots①$$

を得る。平方完成 $x^2+12x+36=(x+6)^2$ を利用して、さらに書き換えると

$$x^2+12x+36=49+36$$
$$(x+6)^2=85$$
$$x+6=\sqrt{85},\ -\sqrt{85}$$

よって、①の解は $x=-6+\sqrt{85},\ -6-\sqrt{85}$ である。

$x=CD>0$　だから、$CD=\boxed{-6+\sqrt{85}}$

H9.3

x の方程式

$$x^2-2(a+3)x+8a+2=0$$

が $x=a$ を解の一つにもつので、$x=a$ を代入した

$$a^2-2a(a+3)+8a+2=0$$

$$a^2-2a^2-6a+8a+2=0$$

$$-a^2+2a+2=0$$

$$a^2-2a-2=0$$

が成り立つ。よって、求める a の値は、この a の方程式の解である。

平方完成 $a^2-2a+1=(a-1)^2$ を利用して方程式を解くと、

$$a^2-2a-2=0$$

$$a^2-2a+1=3$$

$$(a-1)^2=3$$

$$a-1=\sqrt{3},-\sqrt{3}$$

したがって、ありうる a の値は $\boxed{a=1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}}$

H9.4

$A=2+\sqrt{3}, B=2-\sqrt{3}$ とおくと、

$$AB=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$$

$$A^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2=2^2+2\times2\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$$

となることに注目すると、

(1) $\left(2+\sqrt{3}\right)^3\left(2-\sqrt{3}\right)=A^3B=A^2\times AB=A^2\times1=A^2=\boxed{7+4\sqrt{3}}$

(2) $\left(2+\sqrt{3}\right)^4\left(2-\sqrt{3}\right)^2=A^4B^2=A^2\times A^2B^2=A^2\times(AB)^2=A^2\times1^2=A^2=\boxed{7+4\sqrt{3}}$

(3) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{102}\left(2-\sqrt{3}\right)^{100}=A^{102}B^{100}=A^2\times A^{100}B^{100}=A^2\times(AB)^{100}=A^2\times1^{100}=A^2=\boxed{7+4\sqrt{3}}$

H9.5

(1) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=\left\{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}\right\}\left\{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\right\}$

$$=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{5}^2$$

$$=2+2\sqrt{6}+3-5=\boxed{2\sqrt{6}}$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{1 \qquad \times\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\underbrace{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\times\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}_{(1)\text{より}2\sqrt{6}}}$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6} \qquad \times\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{2\times 6}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}}$$