

中2数学X 2019年度1学期 宿題解答

§10 方程式の応用

H10.1

(1) $x^2 + 2x - 1 = 0$

平方完成 $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ を
利用して、

$$x^2 + 2x + 1 = 2$$

$$(x+1)^2 = 2$$

$$x+1 = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

よって、 $\boxed{x = -1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}}$

(2) $x^2 - 6x - 9 = 0$

平方完成 $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ を
利用して、

$$x^2 - 6x + 9 = 18$$

$$(x-3)^2 = 18$$

$$x-3 = 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}$$

よって、 $\boxed{x = 3 + 2\sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3}}$

(3) $2x^2 + 12x + 10 = 0$

両辺を2で割って

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

平方完成 $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ を
利用して、

$$x^2 + 6x + 9 = 4$$

$$(x+3)^2 = 4$$

$$x+3 = 2, -2$$

よって、 $\boxed{x = -1, -5}$

(4) $4x^2 - 1 = 4x$ より、

$$4x^2 - 4x = 1$$

両辺を4で割って

$$x^2 - x = \frac{1}{4}$$

平方完成 $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ を

利用して、

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

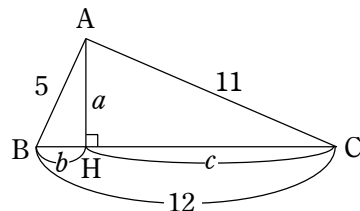
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって、 $\boxed{x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}}$

H10.2

(1) $a = AH, b = BH, c = CH$ とおく。



$\triangle ABH$ にピタゴラスの定理 を用い
て、

$$a^2 + b^2 = 5^2 \dots\dots\dots ①$$

$\triangle ACH$ にピタゴラスの定理 を用い
て、

$$a^2 + c^2 = 11^2 \dots\dots\dots ②$$

$BC = 12$ だから、

$$b + c = 12 \dots\dots\dots ③$$

$$(b + c)(b - c) = (5 + 11)(5 - 11)$$

③を代入して、

$$12(b - c) = 16 \times (-6)$$

$$\therefore b - c = -8 \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

③+④ より、 $2b=4 \quad \therefore b=2$

(よって、 $BH=2$)

①に代入して、

$$a^2 + 2^2 = 5^2$$

$$a^2 = 25 - 4 = 21$$

$$a > 0 \text{ より、 } \text{AH} = a = \boxed{\sqrt{21}}$$

(2) (1)より、

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AH \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{21} = \boxed{6\sqrt{21}}\end{aligned}$$

(3) $\triangle ABC$ の内接円の半径を r とおき、
内心を I とおく。

$$\triangle ABC = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA \text{ より、}$$

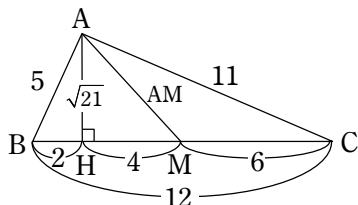
$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (AB + BC + CA) \times r \quad \text{な の}$$

で、(2)より、

$$6\sqrt{21} = \frac{1}{2} \times (5 + 12 + 11) \times r$$

$$14r = 6\sqrt{21}$$

(4)



M は BC の中点なので、

$$BM = CM = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

よって、

$$\text{HM} = \text{BM} - \text{BH}$$

$$= 6 - b = 6 - 2 = 4$$

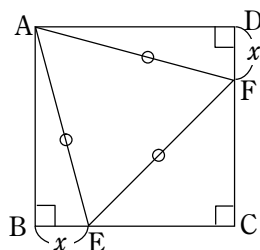
$\triangle AHM$ にピタゴラスの定理を用
て、

$$AM^2 = AH^2 + HM^2$$

$$= \sqrt{21}^2 + 4^2 = 21 + 16 = 37$$

$$AM > 0 \text{ より、 } AM = \sqrt{37}$$

H10.3



斜辺一辺相等で $\triangle ABE \equiv \triangle ADF$ だから、

$$BE = DF = x$$

とおける。直角三角形 ABE にピタゴラスの定理を用いて、

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 = 1 + x^2$$

$CE = CF = 1 - x$ となるから、 $\triangle CEF$ は直
角二等辺三角形で、

$$EF = \sqrt{2} CE = \sqrt{2}(1 - x),$$

$$\therefore EF^2 = 2(1-x)^2 = 2(x-1)^2$$

$\triangle AEF$ が正三角形であることより、

$AE^2 = EF^2$ だから、

$$1 + x^2 = 2(x - 1)^2$$

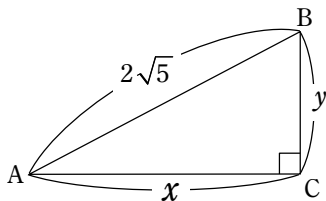
が成り立つ。これを解くと、

$$\begin{aligned}
 1+x^2 &= 2x^2-4x+2 \\
 x^2-4x &= -1 \\
 x^2-4x+4 &= -1+4 \\
 (x-2)^2 &= 3 \\
 x-2 &= \sqrt{3}, -\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

よって、 $x=2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$ を得る。ここで、 $x=BE$ より、 $0 < x < 1$ であるが、 $1 < \sqrt{3} < 2$ だから、これをみたすのは $x=2-\sqrt{3}$ の方だけである。このとき、 $\triangle AEF$ の一辺の長さは、

$$\begin{aligned}
 EF &= \sqrt{2}(1-x) \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) = \boxed{\sqrt{6}-\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

H10.4



$AC=x, BC=y$ とおくと、仮定より
 $x > y$ …… ①

である。斜辺の長さが $2\sqrt{5}$ なので、ピタゴラスの定理より、

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{5})^2, \quad \therefore$$

$$x^2 + y^2 = 20 \quad \dots\dots ②$$

また、面積が 3 なので、

$$\frac{1}{2}xy = 3, \quad \therefore xy = 6 \quad \dots\dots ③$$

③より $y = \frac{6}{x}$ …… ③' なので、②に代入して

$$x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 20 \quad x^2 + \frac{36}{x^2} = 20$$

両辺に x^2 を掛けて、

$$(x^2)^2 + 36 = 20x^2$$

$$\therefore (x^2)^2 - 20x^2 + 36 = 0$$

を得る。まず、 x^2 の値を求めると、

$$(x^2)^2 - 20x^2 + 100 = -36 + 100$$

$$(x^2 - 10)^2 = 64$$

$$x^2 - 10 = 8, -8$$

$$\therefore x^2 = 18, 2$$

であり、 $x > 0$ なので、

$$x = 3\sqrt{2}, \sqrt{2}$$

となる。④より、

$$x = 3\sqrt{2} \text{ のとき } y = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{6 \times \sqrt{2}}{3 \times 2} = \sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ のとき } y = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \times \sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

よって、

$$(x, y) = (3\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$$

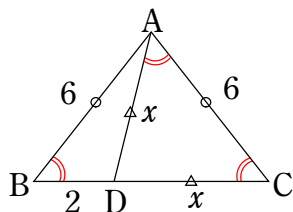
となる。このうち、①を満たすのは

$(x, y) = (3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ なので、

$$\boxed{AC = 3\sqrt{2}, BC = \sqrt{2}}$$

H10.5

(1)



△ABC は $AB = AC$ の二等辺三角形なので、

$$\angle ABC = \angle ACB \dots\dots\dots ①$$

△DCA は $DA = DC$ の二等辺三角形なので、

$$\angle DCA = \angle DAC \dots\dots\dots ②$$

△ABC と △DCA について、①、②より、

$$\angle ABC = \angle DCA,$$

$$\angle ACB = \angle DAC$$

だから、二角相等で、

$$\triangle ABC \sim \triangle DCA$$

が成り立つ。よって、対応辺の比を考えると、

$$AB : BC = DC : CA$$

$AD = DC = x$ とおくと、

$$6 : (2 + x) = x : 6$$

$$\frac{6}{2 + x} = \frac{x}{6}$$

$$(2 + x)x = 36$$

$$\therefore x^2 + 2x = 36$$

を得る。これを解くと、

$$x^2 + 2x + 1 = 36 + 1$$

$$(x + 1)^2 = 37$$

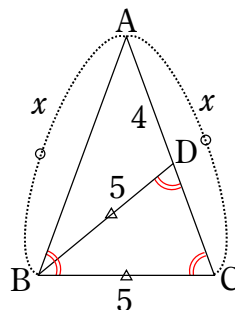
$$x + 1 = \sqrt{37}, -\sqrt{37}$$

$$\therefore x = -1 + \sqrt{37}, -1 - \sqrt{37}$$

であるが、 $x > 0$ だから、

$$AD = x = \boxed{-1 + \sqrt{37}}$$

(2)



△ABC は $AB = AC$ の二等辺三角形なので、

$$\angle ABC = \angle ACB \dots\dots\dots ①$$

△BCD は $BC = BD$ の二等辺三角形なので、

$$\angle BCD = \angle BDC \dots\dots\dots ②$$

△ABC と △BCD について、①、②より、

$$\angle ABC = \angle BCD, \angle ACB = \angle BDC$$

だから、二角相等で、

$$\triangle ABC \sim \triangle BCD$$

が成り立つ。よって、対応辺の比を考えると、

$$AB : BC = BC : CD$$

$AB = AC = x$ とおくと、

$$x : 5 = 5 : (x - 4)$$

$$\frac{x}{5} = \frac{5}{x - 4}$$

$$x(x - 4) = 25$$

$$\therefore x^2 - 4x = 25$$

を得る。これを解くと、

$$x^2 - 4x + 4 = 25 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 29$$

$$x - 2 = \sqrt{29}, -\sqrt{29}$$

$$\therefore x = 2 + \sqrt{29}, 2 - \sqrt{29}$$

であるが、 $x > 0$ だから、

$$AB = x = \boxed{2 + \sqrt{29}}$$