中2数学B 2019年度2学期 本問解答
§2 グラフで考えよう

※ 欠席してしまった場合は、問 2.1～問 2.3 を（余裕があれば問 2.5 も）自分で確認し、p.15 の宿題 H2.1～H2.3 に取り組んで提出してください。

問2.1

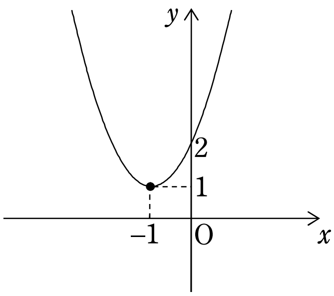
(1) $y = x^2 + 2x + 2$

$= (x^2 + 2x + 1) + 1$

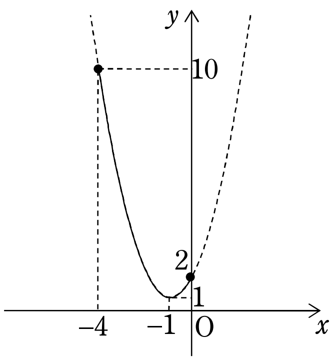
$= (x+1)^2 + 1$

より、この関数のグラフは、頂点が $(-1, 1)$ の下に凸な放物線である。

(i) x が実数全体を変化するときの値域は、$\boxed{y \geqq 1}$ である。



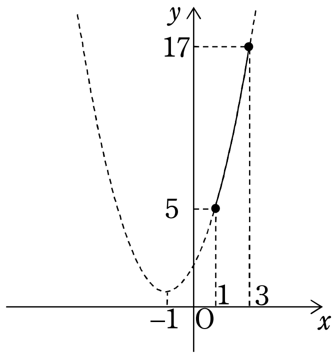
(ii) $x = -4$ のとき $y = 3^2 + 1 = 10$ だから、グラフより、x が $-4 \leqq x \leqq 0$ を変化するときの値域は、$\boxed{1 \leqq y \leqq 10}$ である。



(iii) $x = 1$ のとき $y = 2^2 + 1 = 5$,

$x = 3$ のとき $y = 4^2 + 1 = 17$

だから、グラフより、x が $1 \leqq x \leqq 3$ を変化するときの値域は、$\boxed{5 \leqq y \leqq 17}$ である。



(2) $y=-2x^2+8x+3$

$=-2\left(x^2-4x-\dfrac{3}{2}\right)$

$=-2\left(x^2-4x+4-4-\dfrac{3}{2}\right)$

$=-2\left\{(x-2)^2-\dfrac{11}{2}\right\}$

$=-2(x-2)^2+11$

より、この関数のグラフは、頂点が $(2,11)$ の上に凸な放物線である。

$x=-10$ のとき

$y=-2\times(-12)^2+11=-277$,

$x=13$ のとき

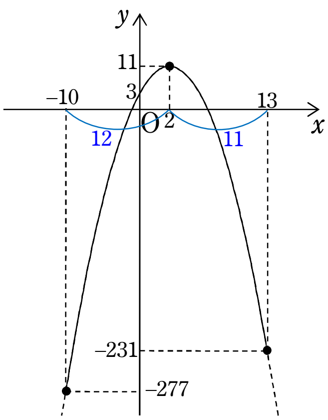
$y=-2\times 11^2+11=-231$

だから、グラフより、x が $-10\leqq x\leqq 13$ を変化するときの

最大値は $\boxed{y=11\quad(x=2)}$

最小値は $\boxed{y=-277\quad(x=-10)}$

である。



※ $x=-10$ の方が $x=13$ よりも $x=2$ から離れているので、$x=-10$ のときの y の値の方が $x=13$ のときの y の値よりも小さくなることが分かる。このことを述べておけば、$x=13$ のときの y の値は計算しなくともよい。

問2.2

(1) $y = x^2 - 3x$

$$= \left(x^2 - 2\times\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4}$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

より、この関数のグラフは、頂点が$\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$の下に凸な放物線である。

よって、x が $-1 \leqq x \leqq 3$ を変化するときの

最小値は $\boxed{y = -\frac{9}{4} \quad \left(x = \frac{3}{2}\right)}$

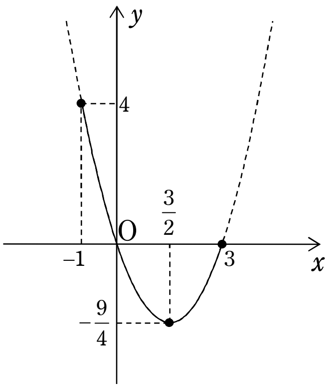
である。また、$x = -1$ の方が $x = 3$ よりも $x = \frac{3}{2}$ から離れているので、$x = -1$ で最大になると分かる。$x = -1$ のとき、

$$y = (-1)^2 - 3\times(-1) = 1 + 3 = 4$$

だから、

最大値は $\boxed{y = 4 \quad (x = -1)}$

である。



(2) $y = 3x^2 - 5x + 2$

$$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right)$$

$$= 3\left(x^2 - 2\times\frac{5}{6}x + \frac{25}{36} - \frac{25}{36} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= 3\left\{\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right\}$$

$$= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$$

より、この関数のグラフは、頂点が$\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{12}\right)$の下に凸な放物線である。

よって、x が $-2 \leqq x \leqq 3$ を変化するときの

最小値は $\boxed{y = -\frac{1}{12} \quad \left(x = \frac{5}{6}\right)}$

である。また、$x = -2$ の方が $x = 3$ よりも $x = \frac{5}{6}$ から離れているので、$x = -2$ で最大になると分かる。$x = -2$ のとき、

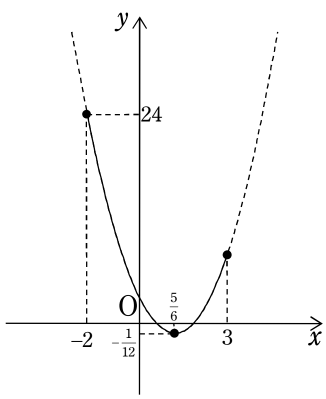
$$y = 3\times(-2)^2 - 5\times(-2) + 2$$

$$= 12 + 10 + 2 = 24$$

だから、

最大値は $\boxed{y = 24 \quad (x = -2)}$

である。



問2.3

(1)

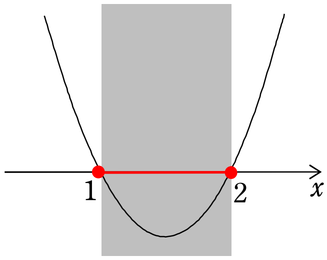
$$(x-2)(x-1) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の解は、$y=(x-2)(x-1)$ のグラフで y 座標が 0 以下になる部分の、x 座標の範囲である。

$y=(x-2)(x-1)$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを平行移動したものであり、x 切片は

$$(x-2)(x-1)=0$$

より、$x=2,1$



したがって、図より、①の解は

$$\boxed{1 \leqq x \leqq 2}$$

(2)

$$-2x^2-6x+8 \leqq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

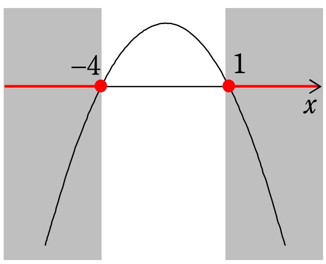
の解は、

$$y=-2x^2-6x+8 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のグラフで y 座標が 0 以下になる部分の、x 座標の範囲である。

$$\begin{aligned} y &= -2x^2-6x+8 \\ &= -2(x^2+3x-4) \\ &= -2(x+4)(x-1) \end{aligned}$$

より、②のグラフは、x 切片が $-4,1$ の上に凸な放物線（$y=-2x^2$ のグラフを平行移動したもの）である。



したがって、図より、①の解は

$$\boxed{x \leqq -4,\ \ 1 \leqq x}$$

(3)

$$-x^2-x+1>0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の解は、$y=-x^2-x+1$ のグラフで y 座標が正になる部分の、x 座標の範囲である。

$y=-x^2-x+1$ のグラフは上に凸な放物線で、x 切片は

$$-x^2-x+1=0$$

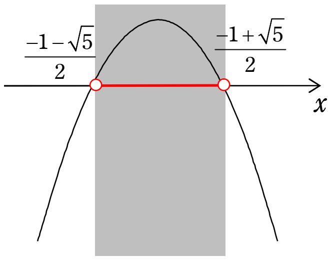
$$x^2+x-1=0$$

$$x^2+x+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$



よって、図より、①の解は

$$\boxed{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(4)

$$x^2-2x+2>0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

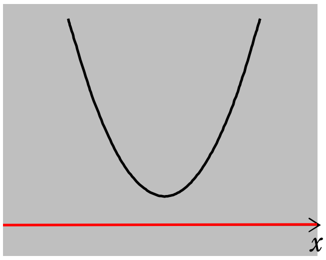
の解は、$y=x^2-2x+2$ のグラフで y 座標が正になる部分の、x 座標の範囲である。

$y=x^2-2x+2$ のグラフは下に凸な放物線で、 x 切片を求めようとすると

$$x^2-2x+1=-1$$

$$(x-1)^2=-1$$

となり、これを満たす実数は存在しないので、グラフは x 軸と共有点を持たないことが分かる。



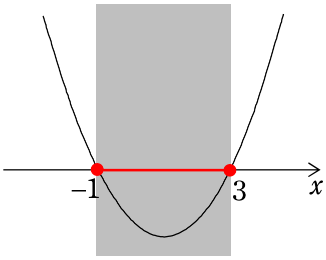
よって、図より、①の解は $\boxed{\text{全実数}}$

問2.4

問 2.3 の類題なので、詳しい解説は略す。

(1) $(x+1)(x-3) \leqq 0$

の解は、$\boxed{-1 \leqq x \leqq 3}$

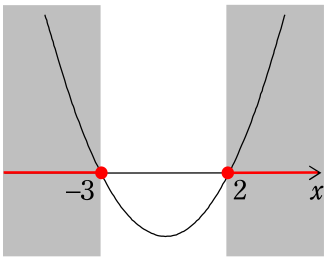


(2) $2x^2 + 2x - 12 \geqq 0$

$2(x^2 + x - 6) \geqq 0$

$2(x+3)(x-2) \geqq 0$

$\therefore \boxed{x \leqq -3,\ 2 \leqq x}$



(3) $-x^2 - 4x + 1 < 0$

を解くために、まず

$-x^2 - 4x + 1 = 0$

を解くと、

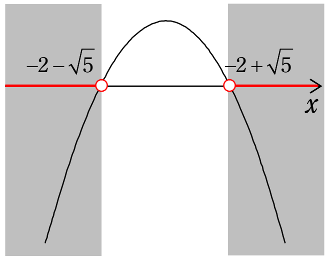
$x^2 + 4x - 1 = 0$

$x^2 + 4x + 4 = 1 + 4$

$(x+2)^2 = 5$

$x + 2 = \sqrt{5}, -\sqrt{5}$

$x = -2 + \sqrt{5}, -2 - \sqrt{5}$

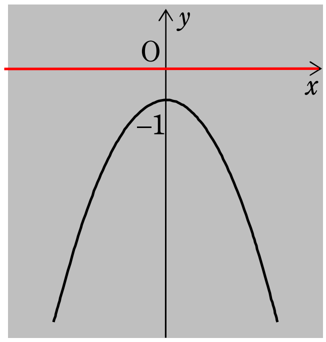


したがって、不等式の解は

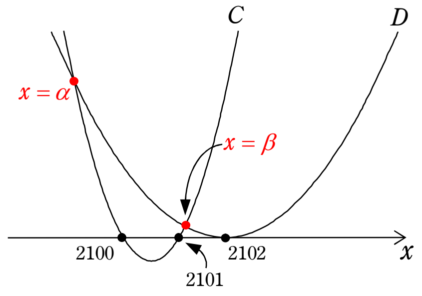
$\boxed{x < -2 - \sqrt{5},\ -2 + \sqrt{5} < x}$

(4) $-2x^2 - 1 < 0$

の解は、$y = -2x^2 - 1$ のグラフで y 座標が負になる部分の x 座標の範囲だから、図より $\boxed{\text{全実数}}$



問2.5



$y=3(x-2100)(x-2101)$ ………… ①

のグラフを C、

$y=(x-2102)^2$ ………………………… ②

のグラフを D とする。方程式

$$3(x-2100)(x-2101) \\ =(x-2102)^2 \quad \cdots\cdots ③$$

の実数解は、C と D の共有点の x 座標である。

C は x 切片が 2100, 2101 の下に凸な放物線であり、D は $x=2102$ で x 軸に接する下に凸な放物線である。さらに、①の x^2 の係数が 3 で、②の x^2 の係数が 1 であることも考えると、上の図のように、C と D が $x<2100$ の範囲と $2101<x<2102$ の範囲に 1 つずつ交点をもつことが分かる。ゆえに、方程式③は、確かに異なる 2 実解 α, β をもち、

$\alpha<2100, \quad 2101<\beta<2102$

である。 したがって、まず

$\boxed{\beta \text{ の整数部分は } 2101}$

と分かった。

次に、α の整数部分を明らかにするため、$x<2100$ の範囲での整数値において、C と D の上下関係を調べよう。

$x=2099$ のとき、

①では　$y=3\times(-1)\times(-2)=6$

②では　$y=(-3)^2=9$

なので，$x=2099$ では C が D より下側にある。

$x=2098$ のとき、

①では　$y=3\times(-2)\times(-3)=18$

②では　$y=(-4)^2=16$

なので，$x=2098$ では C が D より上側にある。

これらのことと、最初の図より、C と D の左側の交点は、$2098<x<2099$ の範囲にあると分かる。つまり、

$2098<\alpha<2099$

であり、

$\boxed{\alpha \text{ の整数部分は } 2098}$

である。