

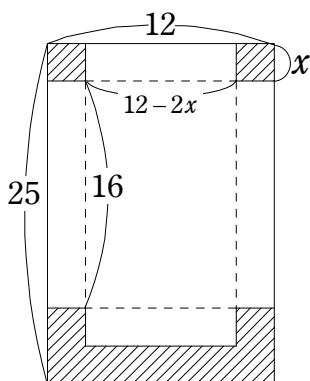
中2数学B 2019年度2学期 本問解答

§3 2次関数の最大・最小

※ 欠席してしまった場合は、問 3.1, 問 3.2 を（余裕があれば問 3.3 も）自分で確認し、p.19 の宿題 H3.1～H3.3 に取り組んで提出してください。

問3.1

(1)



x がみたすべき条件は、

$$\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \\ 25 - 2x \geq 16 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 0 < x \\ x < 6 \\ x \leq \frac{9}{2} \end{cases}$$

である。これより、 x の範囲は

$$0 < x \leq \frac{9}{2} \quad \text{..... ①}$$

(2) 箱の容積を y とすると、

$$y = 16 \times (12 - 2x) \times x$$

これは x の 2 次関数である。平方完成すると、

$$y = 16 \times 2 \times (6 - x) \times x$$

$$= -32(x^2 - 6x)$$

$$= -32\{(x - 3)^2 - 9\}$$

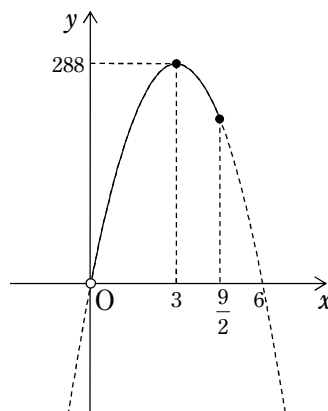
$$= -32(x - 3)^2 + 288$$

となる。

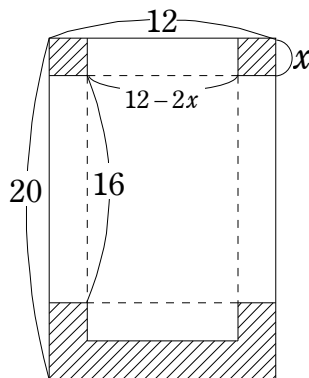
$x = 3$ は①の範囲に含まれているので、このとき、 y が最大になる。

したがって、箱の容積の最大値は

$$288 \quad (x = 3 \text{ のとき})$$



(3)



紙の縦の長さが 20cm のときは、 x がみたすべき条件は、

$$\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \\ 20 - 2x \geq 16 \end{cases} \therefore \begin{cases} 0 < x \\ x < 6 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

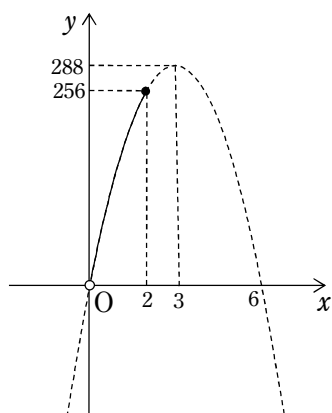
である。これより、 x の範囲は

$$0 < x \leq 2 \quad \text{..... ②}$$

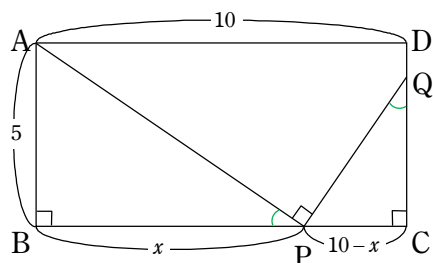
となる。箱の容積 y を x の関数として表すと(2)と同じになるが、 $x=3$ は②の範囲に含まれていないことに注意する。

②より、グラフは下図のようになり、箱の容積の最大値は

$$\boxed{256 \text{ (} x=2 \text{ のとき)}}$$



問3.2



(1) まず、

$$PC = BC - BP = AD - BP = \boxed{10 - x}$$

次に、 $\triangle ABP$ と $\triangle PCQ$ において、

$ABCD$ は長方形なので、

$$\angle ABP = \angle PCQ (= 90^\circ) \dots\dots\dots ①$$

$\triangle PCQ$ の P における外角に着目して、

$$\angle APB + \angle APQ = \angle PQC + \angle PCQ$$

$\angle APQ = 90^\circ$ という仮定と①で確認した

$\angle PCQ = 90^\circ$ から、

$$\angle APB + 90^\circ = \angle PQC + 90^\circ$$

$$\therefore \angle APB = \angle PQC \dots\dots\dots ②$$

①, ②より、

$\triangle ABP \sim \triangle PCQ$ (二角相等)

したがって、

$$AB : BP = PC : CQ$$

だから、

$$\begin{aligned} CQ &= PC \times \frac{BP}{AB} \\ &= (10 - x) \times \frac{x}{5} \\ &= \boxed{\frac{1}{5}x(10 - x)} \end{aligned}$$

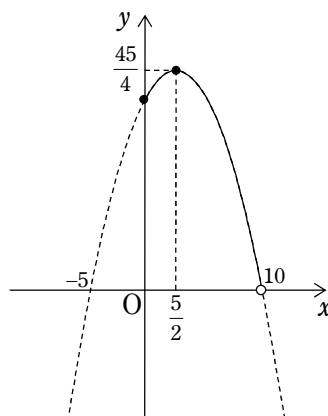
(2) (1)より、 $y = PC + CQ$ とおくと、

$$\begin{aligned} y &= (10 - x) + \frac{1}{5}x(10 - x) \\ &= -\frac{1}{5}x^2 + x + 10 \\ &= -\frac{1}{5}(x^2 - 5x - 50) \\ &= -\frac{1}{5}\left\{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 50\right\} \\ &= -\frac{1}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{45}{4} \end{aligned}$$

よって、 x の範囲が $0 \leq x < 10$ であることにも注意して、この関数のグラフが下図のようになり、 $y = PC + CQ$ が

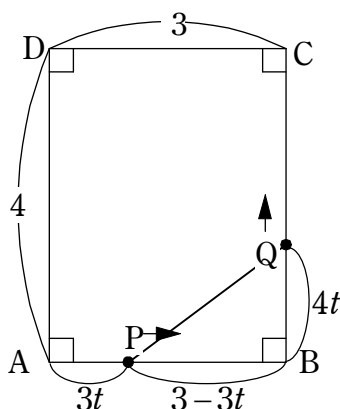
$$\boxed{x = \frac{5}{2}} \text{ で最大値 } \boxed{\frac{45}{4}} \text{ をとる}$$

ことが分かる。



問3.3

(1)



P, Q の速度は一定で、時刻 1 で P は 3 進み、Q は 4 進むので、時刻 t で P は $3t$ 進み、Q は $4t$ 進む。したがって、時刻 t のとき、

$$PB = AB - AP = \boxed{3 - 3t},$$

$$QB = \boxed{4t}$$

(2) $\triangle PBQ$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$PQ^2 = PB^2 + QB^2$$

$$= (3 - 3t)^2 + (4t)^2$$

$$= 9 - 18t + 9t^2 + 16t^2$$

$$= \boxed{25t^2 - 18t + 9}$$

(3) PQ が最小になるのは PQ^2 が最小となるときである。(2)の結果を平方完成すると、

$$PQ^2 = 25 \left(t^2 - \frac{18}{25}t + \frac{9}{25} \right)$$

$$= 25 \left\{ \left(t - \frac{9}{25} \right)^2 - \left(\frac{9}{25} \right)^2 + \frac{9}{25} \right\}$$

$$= 25 \left\{ \left(t - \frac{9}{25} \right)^2 + \frac{9}{25} \left(-\frac{9}{25} + 1 \right) \right\}$$

$$= 25 \left(t - \frac{9}{25} \right)^2 + 9 \times \frac{16}{25}$$

となる。

ここで t の範囲は $0 \leq t \leq 1$ だから、 PQ^2

は $t = \frac{9}{25}$ のとき最小値 $9 \times \frac{16}{25}$ をとる。

したがって、

$$\boxed{t = \frac{9}{25}} \text{ のとき } PQ \text{ は最小値}$$

$$\sqrt{9 \times \frac{16}{25}} = 3 \times \frac{4}{5} = \boxed{\frac{12}{5}} \text{ をとる。}$$

