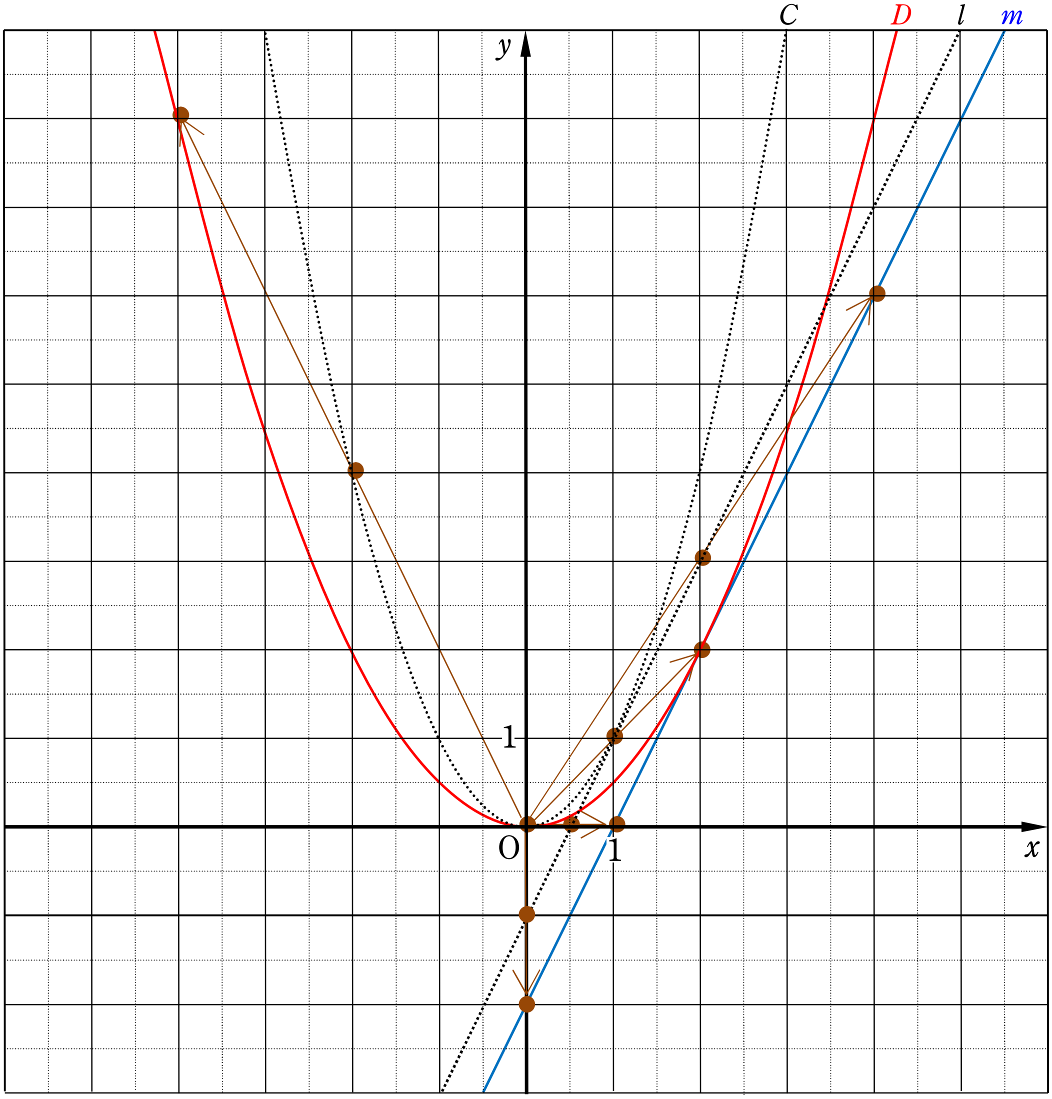
中2数学B 2019年度2学期 本問解答
§4 放物線と相似拡大

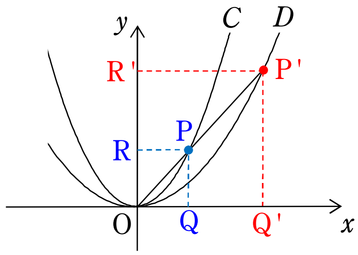
※ 欠席してしまった場合は、問 4.1, 問 4.3 を（余裕があれば問 4.2 も）自分で確認し、p.25 の宿題 H4.1, H4.2 に取り組んで提出してください。

問4.1

(1)



(2) C 上の点Pを O 中心に 2 倍に相似拡大した点をP' とする。P' の描く図形（軌跡）が D である。



P, P' から x 軸に下ろした垂線の足を、それぞれQ, Q' とし、P, P' から y 軸に下ろした垂線の足を、それぞれR, R' とする。

$$\mathrm{OP'} = 2\mathrm{OP}$$

だから、

$$\mathrm{OQ'} = 2\mathrm{OQ}, \quad \mathrm{OR'} = 2\mathrm{OR}$$

である。ここで、P は C 上の点だから、

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OQ}^2$$

をみたす。これより、

$$\mathrm{OR'} = 2\mathrm{OR} = 2\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

一方、

$$(\mathrm{OQ'})^2 = (2\mathrm{OQ})^2 = 4\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

だから、①, ②より、

$$\mathrm{OR'} = \frac{1}{2}(\mathrm{OQ'})^2$$

が成り立つ。これはP' が、

放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$

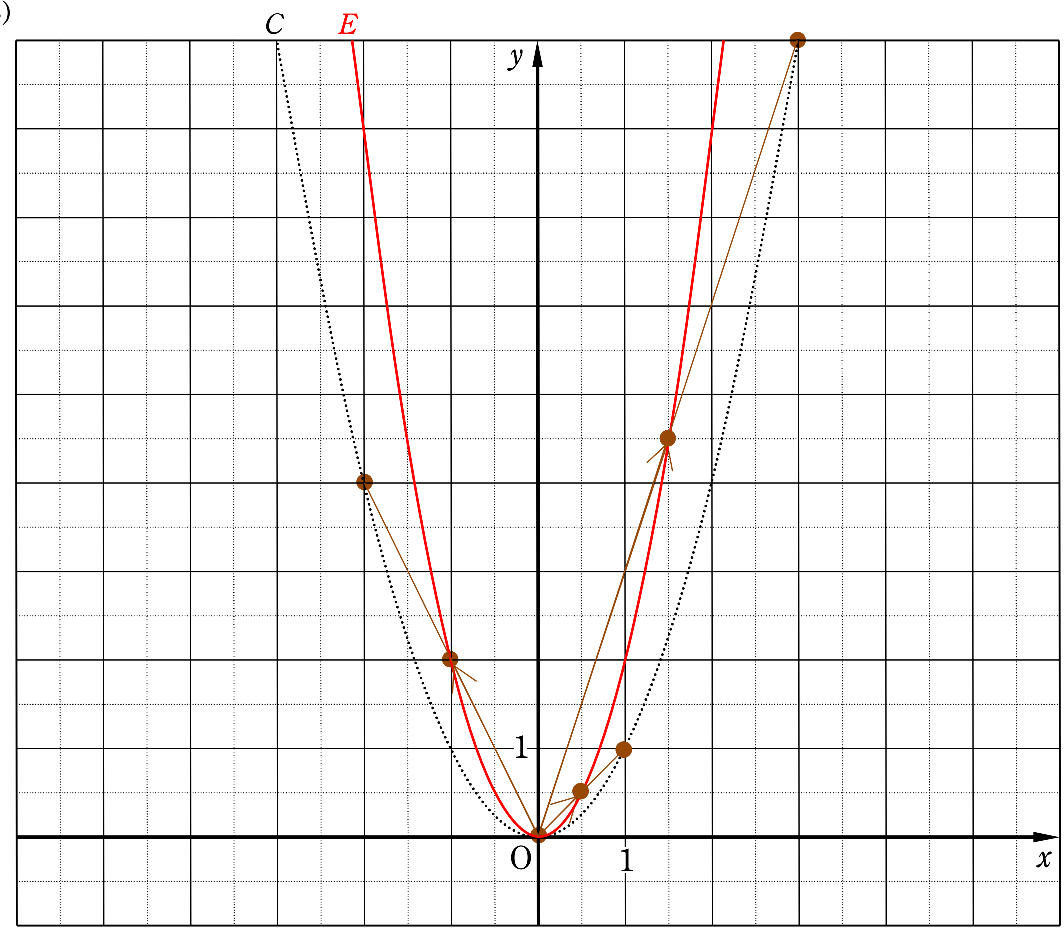
上にあることを意味する。

P が C をくまなく動くとき、P' もこの放物線をくまなく動くから、D は放物線

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x^2}$$

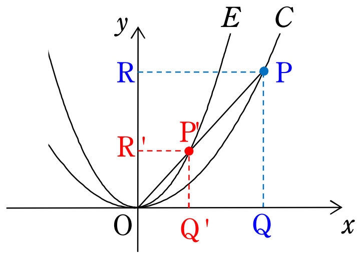
である。

(3)



C 上の点Pを O 中心に$\dfrac{1}{2}$倍に相似拡大した点をP' とする。 P' の軌跡が E である。

P, P' から x 軸に下ろした垂線の足を、それぞれ Q, Q' とし、P, P' から y 軸に下ろした垂線の足を、それぞれ R, R' とする。



$$\mathrm{OP'} = \frac{1}{2}\mathrm{OP}$$

だから、

$$\mathrm{OQ'} = \frac{1}{2}\mathrm{OQ}, \qquad \mathrm{OR'} = \frac{1}{2}\mathrm{OR}$$

である。ここで、P は C 上の点だから、

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OQ}^2$$

をみたす。これより、

$$\mathrm{OR'} = \frac{1}{2}\mathrm{OR} = \frac{1}{2}\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

一方、

$$(\mathrm{OQ}')^2=\left(\frac{1}{2}\mathrm{OQ}\right)^2=\frac{1}{4}\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

だから、①, ②より、

$$\mathrm{OR}'=2(\mathrm{OQ}')^2$$

が成り立つ。これはP'が、

放物線 $y=2x^2$

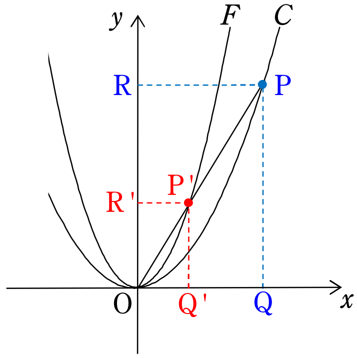
上にあることを意味する。

P が C をくまなく動くとき、P' もこの放物線をくまなく動くから、E は放物線

$$\boxed{y=2x^2}$$

である。

(4) O を中心として $C:y=x^2$ を k 倍（$k>0$）に相似拡大した図形が $F:y=3x^2$ であるとする。



C 上に勝手な点Pをとると、この点の O を中心とした k 倍の相似拡大P' が F 上にあることになる。

(2), (3)同様、P , P' から x 軸に下ろした垂線の足を、それぞれQ , Q' とし、P , P' から y 軸に下ろした垂線の足を、それぞれR , R' とする。

$$\mathrm{OQ}'=k\mathrm{OQ}, \qquad \mathrm{OR}'=k\mathrm{OR}$$

である。ここで、P は C 上の点だから、

$$\mathrm{OR}=\mathrm{OQ}^2$$

をみたす。これより、

$$\mathrm{OR}'=k\mathrm{OR}=k\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

一方、

$$(\mathrm{OQ}')^2=(k\mathrm{OQ})^2=k^2\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。P' は F 上の点だから、

$$\mathrm{OR}'=3(\mathrm{OQ}')^2$$

が成り立つ。ここに①, ②を代入すると、

$$k\mathrm{OQ}^2=3k^2\mathrm{OQ}^2$$

となる。P は C 上に勝手な点なので

（OQ^2 は 0 以上のどんな値も取り得るので)、

$$k=3k^2$$

$$3k^2-k=0$$

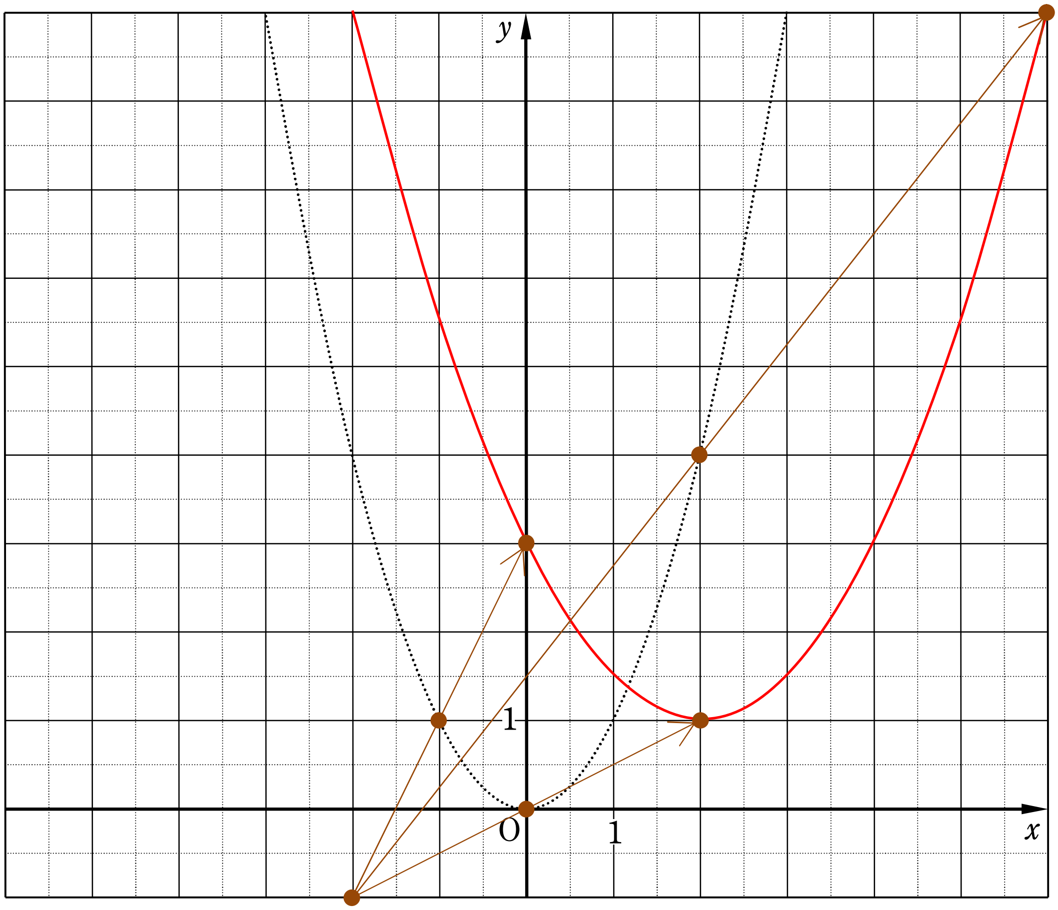
$$k(3k-1)=0$$

$$\therefore k=0, \frac{1}{3}$$

$k>0$ だから $k=\dfrac{1}{3}$ を得る。

以上より、F は、O を中心として C を $\boxed{\dfrac{1}{3}\text{倍}}$ に相似拡大した図形である。

問4.2



放物線$C: y=x^2$の原点 O を中心とした 2 倍の相似拡大が放物線$D_0: y=\frac{1}{2}x^2$であった（問4.1(2)）から、CのAを中心とした2倍の相似拡大Dは、D_0と合同で下に凸な放物線である。また、Dの頂点は、Cの頂点OをAを中心として2倍に相似拡大した点となり、それはB(2,1)である。

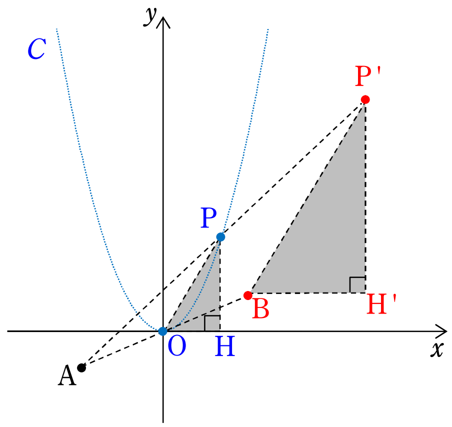
以上より、Dは

$$\boxed{y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1}$$

が表す放物線である。

$\boxed{\text{別解}}$ 問 4.1(2)の結果を前提とせずに論じてみよう。

C 上の点 P を A(−2, −1) 中心に 2 倍に相似拡大した点を P' とする。P' の軌跡が D である。C の頂点 O の A を中心とした 2 倍の相似拡大 (2,1) を B とする。また、P から x 軸に下ろした垂線の足を H とし、H の A を中心とした 2 倍の相似拡大を H' とする。



△BP'H' は△OPH の A を中心とした 2 倍の相似拡大であり、

$$\mathrm{BH'} = 2\mathrm{OH}, \quad \mathrm{P'H'} = 2\mathrm{PH}$$

が成り立つ。ここで、P は C 上の点だから、

$$\mathrm{PH} = \mathrm{OH}^2$$

をみたす。これより、

$$\mathrm{P'H'} = 2\mathrm{PH} = 2\mathrm{OH}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

一方、

$$(\mathrm{BH'})^2 = (2\mathrm{OH})^2 = 4\mathrm{OH}^2 \quad \cdots\cdots ②$$

だから、①, ②より、

$$\mathrm{P'H'} = \frac{1}{2}(\mathrm{BH'})^2 \quad \cdots\cdots ③$$

となる。BH', P'H' はそれぞれ OH, PH と平行であり、したがって、それぞれ x 軸、y 軸と平行である。ゆえに③は、放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ を頂点が B になるように平行移動した放物線上に P' があることを意味する。P が C をくまなく動くとき、P' もこの放物線をくまなく動くから、D は放物線

$$\boxed{y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1}$$

である。

問4.3

求める M の軌跡を E とする。

E は、$C: y=x^2-4x+6$ の原点 O を中心とした $\dfrac{1}{2}$ 倍の相似拡大である。C を平行移動した放物線 $y=x^2$ の（原点を中心とした）$\dfrac{1}{2}$ 倍の相似拡大が放物線 $D: y=2x^2$ であった（問 4.1(3)）から、E は、D と合同で下に凸な放物線である。また、E の頂点は、C の頂点を O を中心として $\dfrac{1}{2}$ 倍に相似拡大した点となる。

C の式を平方完成すると、

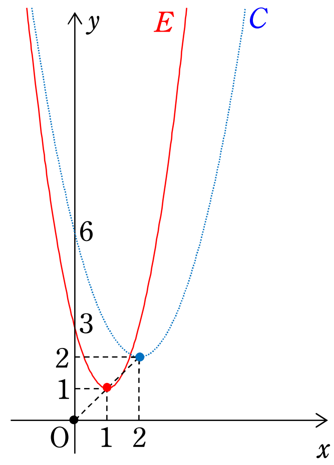
$$\begin{aligned} y &= x^2-4x+4+2 \\ &= (x-2)^2+2 \end{aligned}$$

となるから、C の頂点は $(2,2)$ であり、したがって、E の頂点は $(1,1)$ である。

以上より、E は、

$$\boxed{y=2(x-1)^2+1}$$

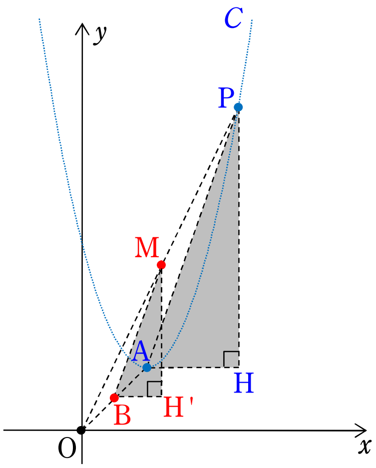
が表す放物線である。



別解 問 4.1(3)の結果を前提とせずに論じてみよう。

C の頂点 $(2,2)$ を A とし(平方完成は上の通り)、A を通り x 軸に平行な直線に、C 上の点 P から下ろした垂線の足を H とする。また、

OA, OH の中点をそれぞれ B, H' とする。



$\triangle$BMH ' は$\triangle$APH の O を中心とした $\dfrac{1}{2}$ 倍の相似拡大であり、

$$\mathrm{BH'} = \frac{1}{2}\mathrm{AH}, \qquad \mathrm{MH'} = \frac{1}{2}\mathrm{PH}$$

が成り立つ。ここで、C は放物線 $y = x^2$ を平行移動したものであり、P は C 上の点だから、

$$\mathrm{PH} = \mathrm{AH}^2$$

をみたす。これより、

$$\mathrm{MH'} = \frac{1}{2}\mathrm{PH} = \frac{1}{2}\mathrm{AH}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

一方、

$$(\mathrm{BH'})^2 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{AH}\right)^2 = \frac{1}{4}\mathrm{AH}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

だから、①, ②より、

$$\mathrm{MH'} = 2(\mathrm{BH'})^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる。BH ', MH ' はそれぞれ AH, PH と平行であり、したがって、それぞれ x 軸、y 軸と平行である。ゆえに③は、放物線 $y = 2x^2$ を頂点が B になるように平行移動した放物線上に M があることを意味する。P が C をくまなく動くとき、M もこの放物線をくまなく動くから、求める M の軌跡は、放物線

$$\boxed{y = 2(x-1)^2 + 1}$$

である。