中2数学B 2019年度2学期 本問解答
§5 放物線と接線

※ 欠席してしまった場合は、問 5.1, 問 5.3 を（余裕があれば問 5.4 も）自分で確認し、p.29 の宿題 H5.1～H5.3 に取り組んで提出してください。

問5.1

(1) 直線 AB の式を $y = px + q$ とおくと、放物線 C との共有点の x 座標の方程式は、

$$x^2 - 4x + 6 = px + q$$

$\therefore x^2 - 4x + 6 - (px + q) = 0$ ……………… ①

となる。①の解が A, B の x 座標 1, 5 だから、その左辺は

$$\begin{aligned} &x^2 - 4x + 6 - (px + q) \\ &\quad = (x-1)(x-5) \end{aligned}$$

と因数分解される。これを整理すると、

$$\begin{aligned} &x^2 + (-p-4)x + (-q+6) \\ &\qquad = x^2 - 6x + 5 \end{aligned}$$

となるから、両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases} -p-4=-6 \\ -q+6=5 \end{cases} \therefore \begin{cases} p=2 \\ q=1 \end{cases}$$

したがって、求める直線の式は、

$$\boxed{y = 2x + 1}$$

(2) A における接線の式を $y = px + q$ とおくと、C との共有点の x 座標の方程式①が $x = 1$ を重解にもつから、①の左辺は

$$x^2 - 4x + 6 - (px + q) = (x-1)^2$$

と因数分解される。これを整理すると、

$$\begin{aligned} &x^2 + (-p-4)x + (-q+6) \\ &\qquad = x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

となるから、両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases} -p-4=-2 \\ -q+6=1 \end{cases} \therefore \begin{cases} p=-2 \\ q=5 \end{cases}$$

したがって、求める接線の式は、

$$\boxed{y = -2x + 5}$$

問5.2

求める接線の式を $y = px + q$ とおくと、放物線との共有点の x 座標の方程式

$$x^2 - 6x + 3 - (px + q) = 0$$

が $x = -1$ を重解にもつ。よって、この左辺は

$$x^2 - 6x + 3 - (px + q) = (x+1)^2$$

と因数分解される。これを整理すると、

$$\begin{aligned} &x^2 + (-p-6)x + (-q+3) \\ &\qquad = x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

となるから、両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases} -p-6=2 \\ -q+3=1 \end{cases} \therefore \begin{cases} p=-8 \\ q=2 \end{cases}$$

したがって、求める接線の式は、

$$\boxed{y = -8x + 2}$$

問5.3

直線 $y = 3x + k$ と放物線 $y = x^2 + 4x$ の接点の x 座標を t とすると、x の方程式

$$x^2 + 4x - (3x + k) = 0$$

が $x = t$ を重解にもつから、この左辺は

$$x^2 + 4x - (3x + k) = (x - t)^2$$

と因数分解される。これを整理すると、

$$x^2 + x - k = x^2 - 2tx + t^2$$

となるから、両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases} 1 = -2t \cdots\cdots ① \\ -k = t^2 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より $t = -\dfrac{1}{2}$

②に代入して、

$$k = -t^2 = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

問5.4

まず、山の稜線の放物線の式を求める。

x 切片が $-2, 2$ であることから、

$$y=a(x+2)(x-2)$$

とおける。展開すると、

$$y=a(x^2-4)$$
$$=ax^2-4a$$

となるが、頂点が A(0,1) だから、

$$-4a=1,\quad \therefore a=-\frac{1}{4}$$

したがって、山の稜線の式は

$$y=-\frac{1}{4}x^2+1$$

である。

さて、P にいる人が打ち上げられた気球をはじめて目にするときの気球の位置を K とすると、直線 PK は山の稜線に接する直線となる。その傾きを k とすると、$\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},0\right)$ を通ることから、直線 PK の式は

$$y=k\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

とおける。山の稜線との接点の x 座標を t $(0<t<2)$ とすると、x の方程式

$$-\frac{1}{4}x^2+1-k\left(x-\frac{5}{2}\right)=0$$

が $x=t$ を重解にもつから、この左辺は

$$-\frac{1}{4}x^2+1-k\left(x-\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{4}(x-t)^2$$

と因数分解される。これを整理すると、

$$-\frac{1}{4}x^2-kx+\left(\frac{5}{2}k+1\right)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}tx-\frac{1}{4}t^2$$

となるから、両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases} -k=\dfrac{1}{2}t & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{5}{2}k+1=-\dfrac{1}{4}t^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より，$k=-\frac{1}{2}t$

②に代入して、

$$-\frac{5}{4}t+1=-\frac{1}{4}t^2$$
$$\frac{1}{4}t^2-\frac{5}{4}t+1=0$$
$$t^2-5t+4=0$$
$$(t-1)(t-4)=0$$
$$\therefore t=1,4$$

$0<t<2$ だから $t=1$

よって $k=-\frac{1}{2}$

ゆえに直線 PK の式は

$$y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

であり、ここに C の x 座標 $x=-2$ を代入して、K の y 座標は、

$$y=-\frac{1}{2}\left(-2-\frac{5}{2}\right)=\boxed{\frac{9}{4}}\,(\mathrm{km})$$

であり、これが求める気球の高さである。