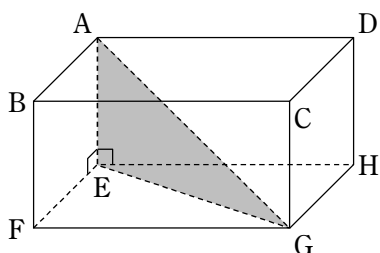


中2数学B 2019年度2学期 本問解答 §6 垂直条件

※ 欠席してしまった場合は、問 6.1～問 6.3 を（余裕があれば問 6.4 も）自分で確認し、p.36 の宿題 H6.1～H6.3 に取り組んで提出してください。

問6.1

(1)



AEHD は長方形なので

$$AE \perp EH \dots\dots\dots ①$$

ABFE は長方形なので

$$AE \perp EF \dots\dots\dots ②$$

EH, EF は平行でないから、①, ②より

$$AE \perp \text{面EFGH} \dots\dots\dots ③$$

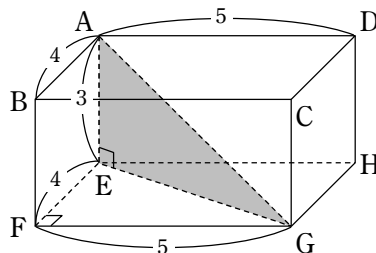
③より、

$$AE \perp EG$$

すなわち、 $\angle AEG = 90^\circ$ (q.e.d.)

(2) (1)より、AG は直角三角形 AEG の斜辺だから、ピタゴラスの定理より、

$$AG^2 = EG^2 + AE^2 \dots\dots\dots ④$$



EG は直角三角形 EFG の斜辺なので、ピタゴラスの定理より、

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 \dots\dots\dots ⑤$$

④, ⑤より

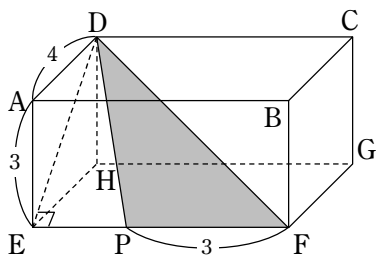
$$AG^2 = EF^2 + FG^2 + AE^2$$

$$= AB^2 + AD^2 + AE^2$$

$$= 16 + 25 + 9 = 50$$

$$\therefore AG = \sqrt{50} = \boxed{5\sqrt{2}} (> 0)$$

問6.2



AEFB は長方形なので $EF \perp AE$ …… ①

HEFG は長方形なので $EF \perp HE$ …… ②

AE, HE は平行でないから、①, ②より、

$EF \perp$ 面 AEHD $\therefore EF \perp DE$

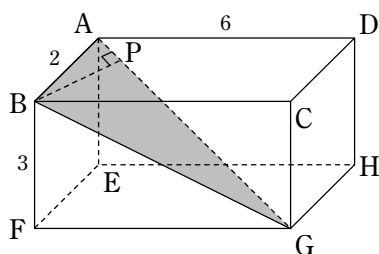
したがって、 $\triangle DPF$ の PF を底辺としたときの
高さは DE と分かり、

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

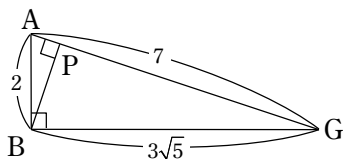
$$\therefore \triangle DPF = \frac{1}{2} \times PF \times DE = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = \boxed{\frac{15}{2}}$$

問6.3

(1)

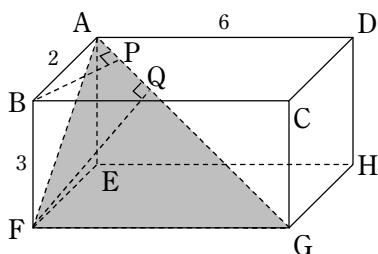


ABCD は長方形なので $AB \perp BC \cdots ①$
 ABFE は長方形なので $AB \perp BF \cdots ②$
 BC, BF は平行でないから、①、②より、
 $AB \perp \text{面} BCGF \therefore AB \perp BG$
 と分かる。直角三角形 ABG に注目すると、 $\triangle BAG$ と $\triangle PAB$ において
 $\angle ABG = \angle APB (=90^\circ)$
 $\angle BAG = \angle PAB$ (共通)
 $\therefore \triangle ABG \sim \triangle APB$ (二角相等)

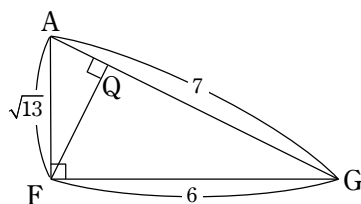


対応辺の比は等しいので、
 $AB : AG = AP : AB \cdots \cdots ③$
 BG は長方形 BFGC の対角線なので、ピタゴラスの定理より、
 $BG^2 = BF^2 + FG^2 = 3^2 + 6^2 = 45$
 $\triangle ABG$ にピタゴラスの定理を用いて、
 $AG^2 = AB^2 + BG^2 = 2^2 + 45 = 49$
 $\therefore AG = 7 (>0)$
 したがって、③より、
 $2 : 7 = AP : 2$
 $\therefore AP = 2 \times \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$

(2)



BFGC は長方形なので $GF \perp BF \cdots ④$
 EFGH は長方形なので $GF \perp EF \cdots ⑤$
 BF, EF は平行でないから、④、⑤より、
 $GF \perp \text{面} ABFE \therefore GF \perp AF$
 と分かる。直角三角形 AFG に注目すると、 $\triangle AFG$ と $\triangle AQF$ において
 $\angle AFG = \angle AQF (=90^\circ)$
 $\angle FAG = \angle QAF$ (共通)
 $\therefore \triangle AFG \sim \triangle AQF$ (二角相等)



対応辺の比は等しいので、
 $AF : AG = AQ : AF \cdots \cdots ⑥$

AF は長方形 ABFE の対角線なので、ピタゴラスの定理より
 $AF^2 = AB^2 + BF^2 = 2^2 + 3^2 = 13$
 $\therefore AF = \sqrt{13} (>0)$
 したがって、⑥より
 $\sqrt{13} : 7 = AQ : \sqrt{13}$
 $\therefore AQ = \sqrt{13} \times \frac{\sqrt{13}}{7} = \frac{13}{7}$
 よって、
 $PQ = AQ - AP = \frac{13}{7} - \frac{4}{7} = \frac{9}{7}$
 $QG = AG - AQ = 7 - \frac{13}{7} = \frac{36}{7}$
 であり、

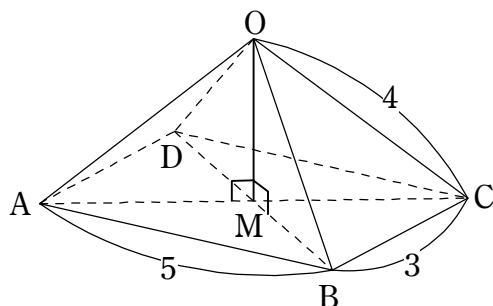
$$AP:PQ:QG = \frac{4}{7}:\frac{9}{7}:\frac{36}{7} = \boxed{4:9:36}$$

※ 直方体 ABCD-EFGH の対角線 AG に、B, F から下した垂線の足をそれぞれ P, Q とするとき、

$AP:PQ:QG = AB^2:BF^2:FG^2$
が成り立つ。

問6.4

(1)



ABCD は長方形なので M は A, C の中点である。 $\triangle OAC$ は $OA = OC$ の二等辺三角形だから、中線 OM は O から AC へ下ろした垂線と一致する。

$$OM \perp AC \dots\dots\dots ①$$

同様に、M が B, D の中点で、 $\triangle OBD$ が $OB = OD$ の二等辺三角形であることから、

$$OM \perp BD \dots\dots\dots ②$$

AC と BD は平行でないから、①, ②より、

$$OM \perp \text{面}ABCD \dots\dots\dots ③$$

(q.e.d.)

(2) ③より、ABCD を底面とみたときの四角錐 O-ABCD の高さは OM である。

まず、 $\triangle ABC$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 5^2 + 3^2 = 34 \end{aligned}$$

$$\therefore AC = \sqrt{34} (> 0)$$

したがって、

$$AM = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

次に、 $\triangle OMA$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

よって、

$$\begin{aligned} OM^2 &= OA^2 - AM^2 \\ &= 4^2 - \left(\frac{\sqrt{34}}{2} \right)^2 = 16 - \frac{34}{4} \\ &= \frac{64 - 34}{4} = \frac{30}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore OM = \frac{\sqrt{30}}{2} (> 0)$$

したがって、O-ABCD の体積は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \times (\text{ABCDの面積}) \times OM \\ &= \frac{1}{3} \times AB \times BC \times OM \\ &= \frac{1}{3} \times 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{30}}{2} \\ &= \boxed{\frac{5\sqrt{30}}{2}} \end{aligned}$$