# 中2数学C 2019年度2学期 本問解答
## §2 グラフで考えよう

※ 欠席してしまった場合は、問 2.1～問 2.3 を（余裕があれば問 2.5 も）自分で確認し、p.15 の宿題 H2.1～H2.3 に取り組んで提出してください。

### 問2.1

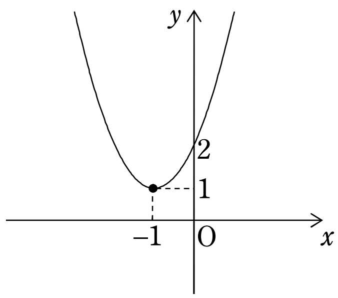
(1) $y=x^2+2x+2$

$=(x^2+2x+1)+1$

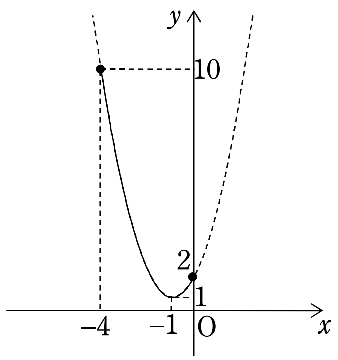
$=(x+1)^2+1$

より、この関数のグラフは、頂点が $(-1,1)$ の下に凸な放物線である。

(i) $x$ が実数全体を変化するときの値域は、$\boxed{y\geqq 1}$ である。



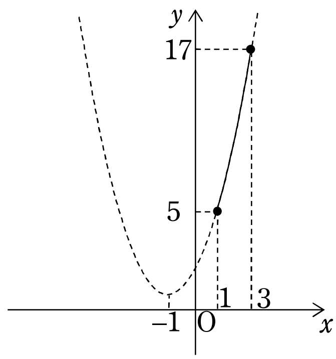

(ii) $x=-4$ のとき $y=3^2+1=10$ だから、グラフより、$x$ が $-4\leqq x\leqq 0$ を変化するときの値域は、$\boxed{1\leqq y\leqq 10}$ である。




(iii) $x=1$ のとき $y=2^2+1=5$ ,

$x=3$ のとき $y=4^2+1=17$

だから、グラフより、$x$ が $1\leqq x\leqq 3$ を変化するときの値域は、$\boxed{5\leqq y\leqq 17}$ である。



(2) $y=-2x^2+8x+3$

$$=-2\left(x^2-4x-\frac{3}{2}\right)$$

$$=-2\left(x^2-4x+4-4-\frac{3}{2}\right)$$

$$=-2\left\{(x-2)^2-\frac{11}{2}\right\}$$

$$=-2(x-2)^2+11$$

より、この関数のグラフは、頂点が$(2,11)$の上に凸な放物線である。

$x=-10$ のとき

$y=-2\times(-12)^2+11=-277$,

$x=13$ のとき

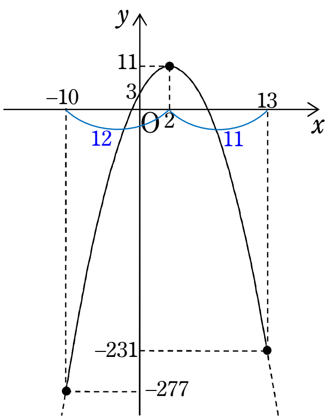
$y=-2\times 11^2+11=-231$

だから、グラフより、$x$ が $-10\leqq x\leqq 13$ を変化するときの

最大値は $\boxed{y=11 \quad (x=2)}$

最小値は $\boxed{y=-277 \quad (x=-10)}$

である。




※ $x=-10$ の方が $x=13$ よりも $x=2$ から離れているので、$x=-10$ のときの $y$ の値の方が $x=13$ のときの $y$ の値よりも小さくなることが分かる。このことを述べておけば、$x=13$ のときの $y$ の値は計算しなくともよい。

## 問2.2

(1) $y = x^2 - 3x$

$$= \left(x^2 - 2\times\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4}$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

より、この関数のグラフは、頂点が $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ の下に凸な放物線である。

よって、$x$ が $-1 \leqq x \leqq 3$ を変化するときの

最小値は $\boxed{y = -\frac{9}{4} \quad \left(x = \frac{3}{2}\right)}$

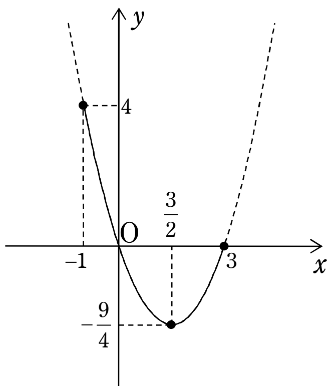
である。また、$x=-1$ の方が $x=3$ よりも $x = \frac{3}{2}$ から離れているので、$x=-1$ で最大になると分かる。$x=-1$ のとき、

$$y = (-1)^2 - 3\times(-1) = 1 + 3 = 4$$

だから、

最大値は $\boxed{y = 4 \quad (x = -1)}$

である。




(2) $y = 3x^2 - 5x + 2$

$$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right)$$

$$= 3\left(x^2 - 2\times\frac{5}{6}x + \frac{25}{36} - \frac{25}{36} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= 3\left\{\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right\}$$

$$= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$$

より、この関数のグラフは、頂点が $\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ の下に凸な放物線である。

よって、$x$ が $-2 \leqq x \leqq 3$ を変化するときの

最小値は $\boxed{y = -\frac{1}{12} \quad \left(x = \frac{5}{6}\right)}$

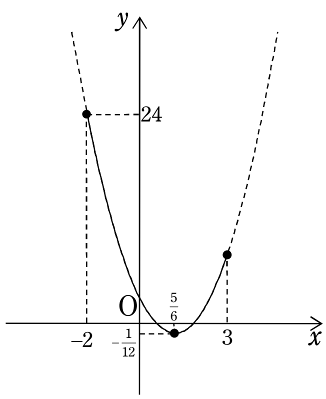
である。また、$x=-2$ の方が $x=3$ よりも $x = \frac{5}{6}$ から離れているので、$x=-2$ で最大になると分かる。$x=-2$ のとき、

$$y = 3\times(-2)^2 - 5\times(-2) + 2$$
$$= 12 + 10 + 2 = 24$$

だから、

最大値は $\boxed{y = 24 \quad (x = -2)}$

である。



## 問2.3

(1)

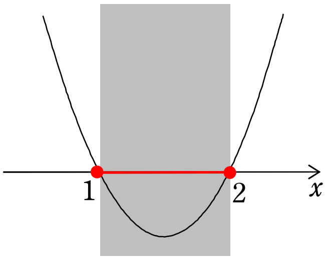
$$(x-2)(x-1) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の解は、$y=(x-2)(x-1)$ のグラフで $y$ 座標が 0 以下になる部分の、$x$ 座標の範囲である。

$y=(x-2)(x-1)$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを平行移動したものであり、$x$ 切片は

$$(x-2)(x-1)=0$$

より、$x=2,1$




したがって、図より、①の解は

$$\boxed{1 \leqq x \leqq 2}$$

(2)

$$-2x^2-6x+8 \leqq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

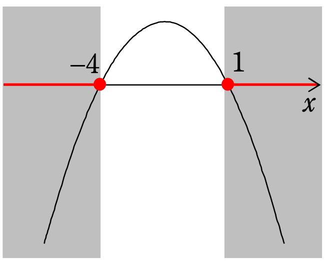
の解は、

$$y=-2x^2-6x+8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のグラフで $y$ 座標が 0 以下になる部分の、$x$ 座標の範囲である。

$$\begin{aligned} y &= -2x^2-6x+8 \\ &= -2(x^2+3x-4) \\ &= -2(x+4)(x-1) \end{aligned}$$

より、②のグラフは、$x$ 切片が $-4,1$ の上に凸な放物線（$y=-2x^2$ のグラフを平行移動したもの）である。




したがって、図より、①の解は

$$\boxed{x \leqq -4,\ \ 1 \leqq x}$$

(3)

$$-x^2-x+1>0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の解は、$y=-x^2-x+1$ のグラフで $y$ 座標が正になる部分の、$x$ 座標の範囲である。

$y=-x^2-x+1$ のグラフは上に凸な放物線で、$x$ 切片は

$$-x^2-x+1=0$$

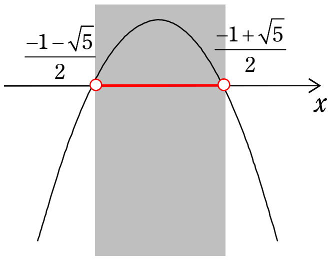
$$x^2+x-1=0$$

$$x^2+x+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$




よって、図より、①の解は

$$\boxed{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(4)

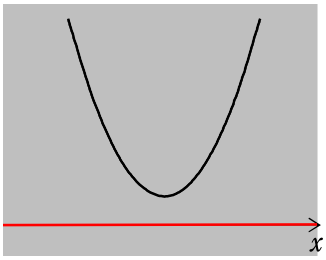
$$x^2-2x+2>0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の解は、$y=x^2-2x+2$ のグラフで $y$ 座標が正になる部分の、$x$ 座標の範囲である。$y=x^2-2x+2$ のグラフは下に凸な放物線で、$x$ 切片を求めようとすると

$$x^2-2x+1=-1$$

$$(x-1)^2=-1$$

となり、これを満たす実数は存在しないので、グラフは $x$ 軸と共有点を持たないことが分かる。



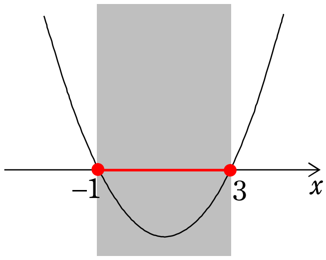

よって、図より、①の解は $\boxed{\text{全実数}}$

## 問2.4

問 2.3 の類題なので、詳しい解説は略す。

(1) $(x+1)(x-3) \leqq 0$

の解は、$\boxed{-1 \leqq x \leqq 3}$

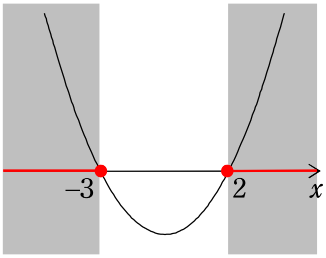



(2) $2x^2 + 2x - 12 \geqq 0$

$2(x^2 + x - 6) \geqq 0$

$2(x+3)(x-2) \geqq 0$

$\therefore \boxed{x \leqq -3,\ 2 \leqq x}$




(3) $-x^2 - 4x + 1 < 0$

を解くために、まず

$-x^2 - 4x + 1 = 0$

を解くと、

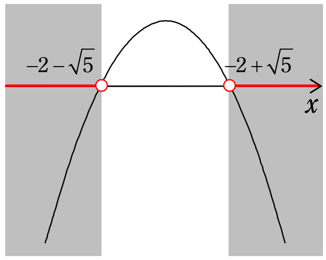
$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 1 + 4$$

$$(x+2)^2 = 5$$

$$x + 2 = \sqrt{5}, -\sqrt{5}$$

$$x = -2 + \sqrt{5}, -2 - \sqrt{5}$$

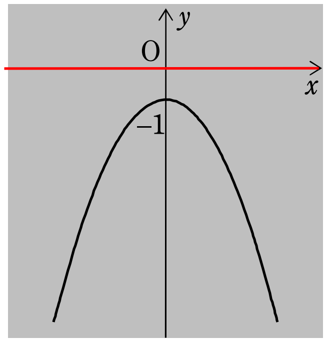



したがって、不等式の解は

$\boxed{x < -2 - \sqrt{5},\ -2 + \sqrt{5} < x}$

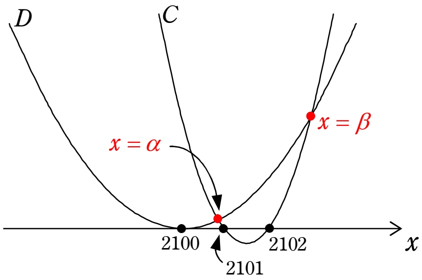
(4) $-2x^2 - 1 < 0$

の解は、$y = -2x^2 - 1$ のグラフで $y$ 座標が負になる部分の $x$ 座標の範囲だから、図より $\boxed{\text{全実数}}$



## 問2.5

(1)




$$y=3(x-2102)(x-2101) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを $C$、

$$y=(x-2100)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のグラフを $D$ とする。方程式

$$3(x-2102)(x-2101)=(x-2100)^2 \quad \cdots\cdots ③$$

の実数解は、$C$ と $D$ の共有点の $x$ 座標である。

$C$ は $x$ 切片が $2102, 2101$ の下に凸な放物線であり、$D$ は $x=2100$ で $x$ 軸に接する下に凸な放物線である。さらに、①の $x^2$ の係数が 3 で、②の $x^2$ の係数が 1 であることも考えると、上の図のように、$C$ と $D$ が $2100<x<2101$ の範囲と $x>2102$ の範囲に 1 つずつ交点をもつことが分かる。ゆえに、方程式③は、確かに異なる 2 実解 $\alpha, \beta$ をもち、

$$2100<\alpha<2101, \quad \beta>2102$$

である。 したがって、まず

$\boxed{\alpha \text{ の整数部分は } 2100}$

と分かった。

次に、$\beta$ の整数部分を明らかにするため、$x>2102$ の範囲での整数値において、$C$ と $D$ の上下関係を調べよう。

$x=2103$ のとき、

①では　$y=3\times1\times2=6$

②では　$y=3^2=9$

なので，$x=2103$ では $C$ が $D$ より下側にある。

$x=2104$ のとき、

①では　$y=3\times2\times3=18$

②では　$y=4^2=16$

なので，$x=2104$ では $C$ が $D$ より上側にある。

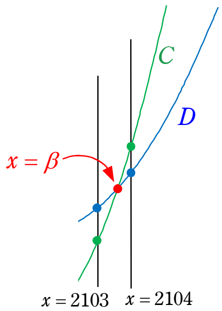
これらのことと、最初の図より、$C$ と $D$ の左側の交点は、$2103<x<2104$ の範囲にあると分かる。つまり、

$$2103<\beta<2104$$

であり、

$\boxed{\beta \text{ の整数部分は } 2103}$

である。




(2)

$$2100<\alpha<2101, \quad 2103<\beta<2104$$

まで分かっているので、さらに $\alpha$ と $2100.5$ の大小、$\beta$ と $2103.5$ の大小を調べよう。

$x=2100.5$ のとき、

①では　$y=3\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$

②では　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

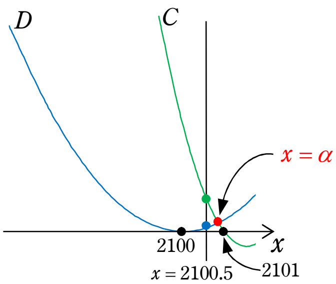
なので，$x=2100.5$ では $C$ が $D$ より上側にある。よって、(1)の考察と合わせて、

$$2100.5<\alpha<2101$$

と分かるので、

$\boxed{\alpha \text{ に最も近い整数は } 2101}$

である。




$x = 2103.5$ のとき、

①では　$y = 3 \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{45}{4}$

②では　$y = \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{49}{4}$

なので，$x = 2103.5$ では $C$ が $D$ より下側にある。よって、(1)の考察と合わせて、

$2103.5 < \beta < 2104$

と分かるので、

$\boxed{\beta \text{ に最も近い整数は } 2104}$

である。