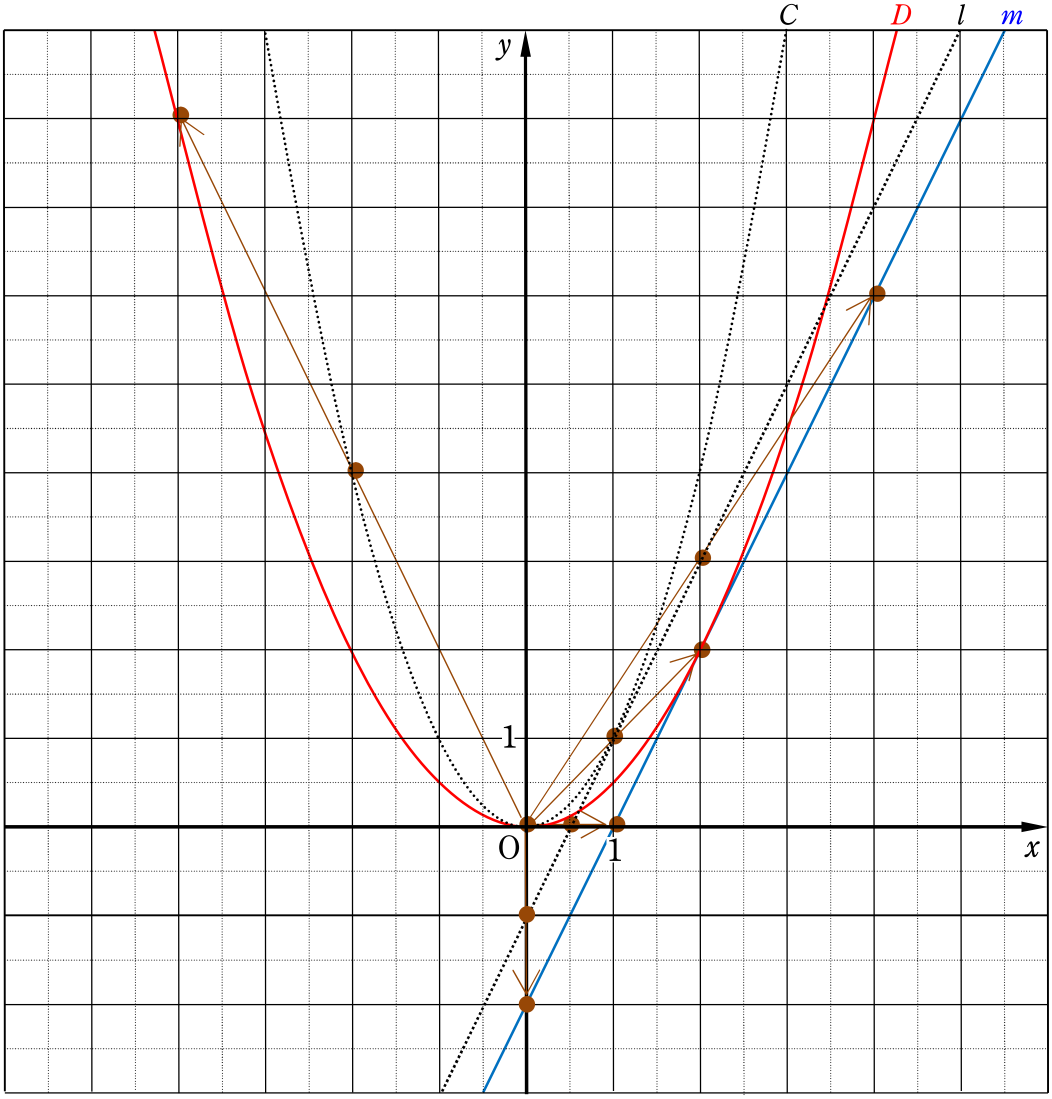
# 中2数学C 2019年度2学期 本問解答
# §4 放物線と相似拡大

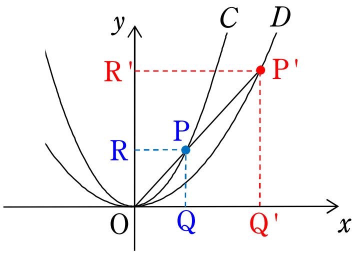
※ 欠席してしまった場合は、問 4.1〜問 4.3 を（余裕があれば問 4.4 も）自分で確認し、p.25 の宿題 H4.1, H4.2 に取り組んで提出してください。

## 問4.1

(1)



(2) $C$ 上の点 P を O 中心に 2 倍に相似拡大した点を P' とする。P' の描く図形（軌跡）が $D$ である。




P, P' から $x$ 軸に下ろした垂線の足を、それぞれ Q, Q' とし、P, P' から $y$ 軸に下ろした垂線の足を、それぞれ R, R' とする。

$$\mathrm{OP'} = 2\mathrm{OP}$$

だから、

$$\mathrm{OQ'} = 2\mathrm{OQ}, \quad \mathrm{OR'} = 2\mathrm{OR}$$

である。ここで、P は $C$ 上の点だから、

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OQ}^2$$

をみたす。これより、

$$\mathrm{OR'} = 2\mathrm{OR} = 2\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

一方、

$$(\mathrm{OQ'})^2 = (2\mathrm{OQ})^2 = 4\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots ②$$

だから、①, ②より、

$$\mathrm{OR'} = \frac{1}{2}(\mathrm{OQ'})^2$$

が成り立つ。これは P' が、

放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$

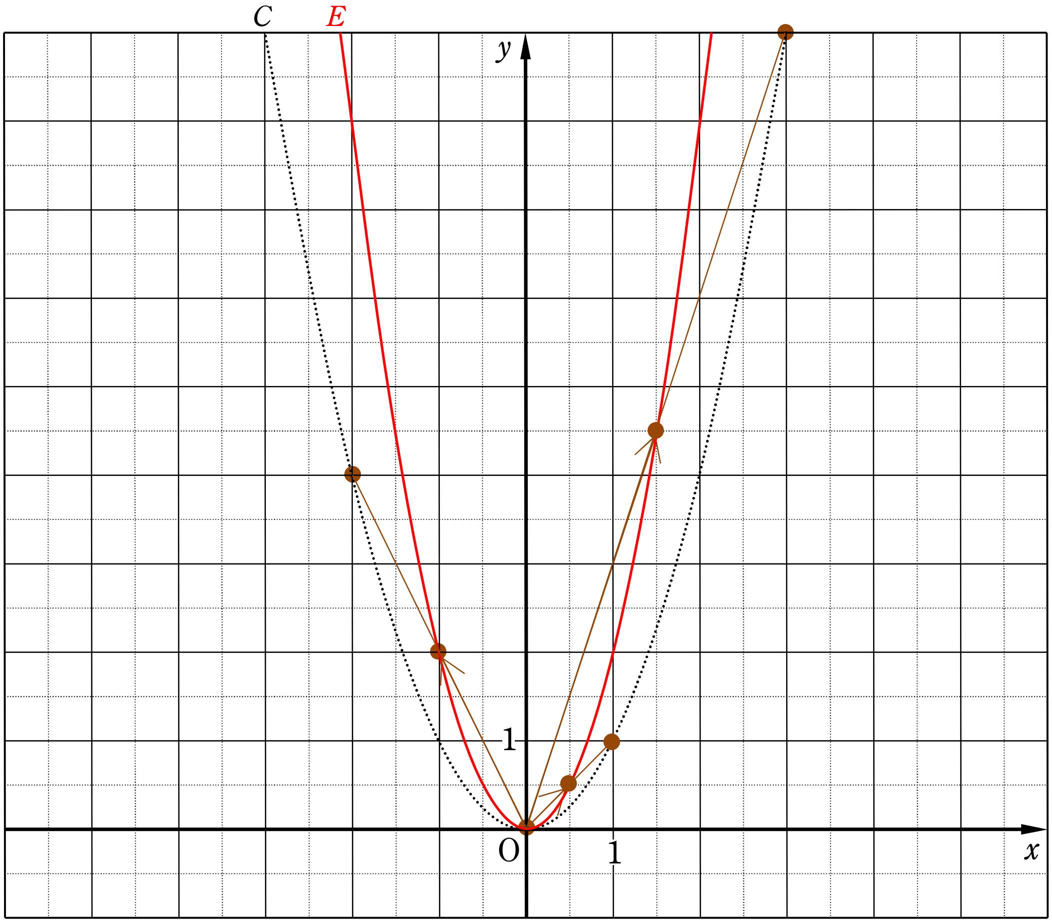
上にあることを意味する。

P が $C$ をくまなく動くとき、P' もこの放物線をくまなく動くから、$D$ は放物線

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x^2}$$

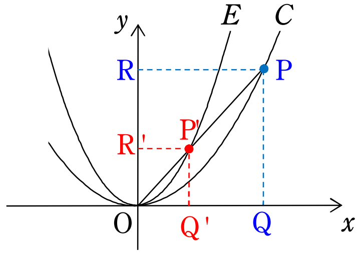
である。

(3)




$C$ 上の点Pを O 中心に$\dfrac{1}{2}$倍に相似拡大した点をP'とする。 P'の軌跡が $E$ である。

P, P'から $x$ 軸に下ろした垂線の足を、それぞれQ, Q'とし、P, P'から $y$ 軸に下ろした垂線の足を、それぞれR, R'とする。




$$\mathrm{OP'} = \frac{1}{2}\mathrm{OP}$$

だから、

$$\mathrm{OQ'} = \frac{1}{2}\mathrm{OQ}, \qquad \mathrm{OR'} = \frac{1}{2}\mathrm{OR}$$

である。ここで、P は $C$ 上の点だから、

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OQ}^2$$

をみたす。これより、

$$\mathrm{OR'} = \frac{1}{2}\mathrm{OR} = \frac{1}{2}\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

一方、

$$(\mathrm{OQ}')^2 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{OQ}\right)^2 = \frac{1}{4}\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

だから、①, ②より、

$$\mathrm{OR}' = 2(\mathrm{OQ}')^2$$

が成り立つ。これはP'が、

放物線 $y = 2x^2$

上にあることを意味する。

P が $C$ をくまなく動くとき、P' もこの放物線をくまなく動くから、$E$ は放物線

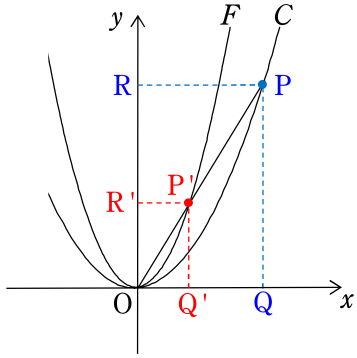
$$\boxed{y = 2x^2}$$

である。

(4) O を中心として $C: y = x^2$ を $k$ 倍（$k > 0$）に相似拡大した図形が $F: y = 3x^2$ であるとする。

$C$ 上に勝手な点Pをとると、この点の O を中心とした $k$ 倍の相似拡大P'が $F$ 上にあることになる。

(2), (3)同様、P, P' から $x$ 軸に下ろした垂線の足を、それぞれQ, Q' とし、P, P' から $y$ 軸に下ろした垂線の足を、それぞれR, R' とする。




$$\mathrm{OQ}' = k\mathrm{OQ}, \qquad \mathrm{OR}' = k\mathrm{OR}$$

である。ここで、P は $C$ 上の点だから、

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OQ}^2$$

をみたす。これより、

$$\mathrm{OR}' = k\mathrm{OR} = k\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

一方、

$$(\mathrm{OQ}')^2 = (k\mathrm{OQ})^2 = k^2\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。P'は $F$ 上の点だから、

$$\mathrm{OR}' = 3(\mathrm{OQ}')^2$$

が成り立つ。ここに①, ②を代入すると、

$$k\mathrm{OQ}^2 = 3k^2\mathrm{OQ}^2$$

となる。P は $C$ 上に勝手な点なので

（$\mathrm{OQ}^2$ は 0 以上のどんな値も取り得るので)、

$$k = 3k^2$$

$$3k^2 - k = 0$$

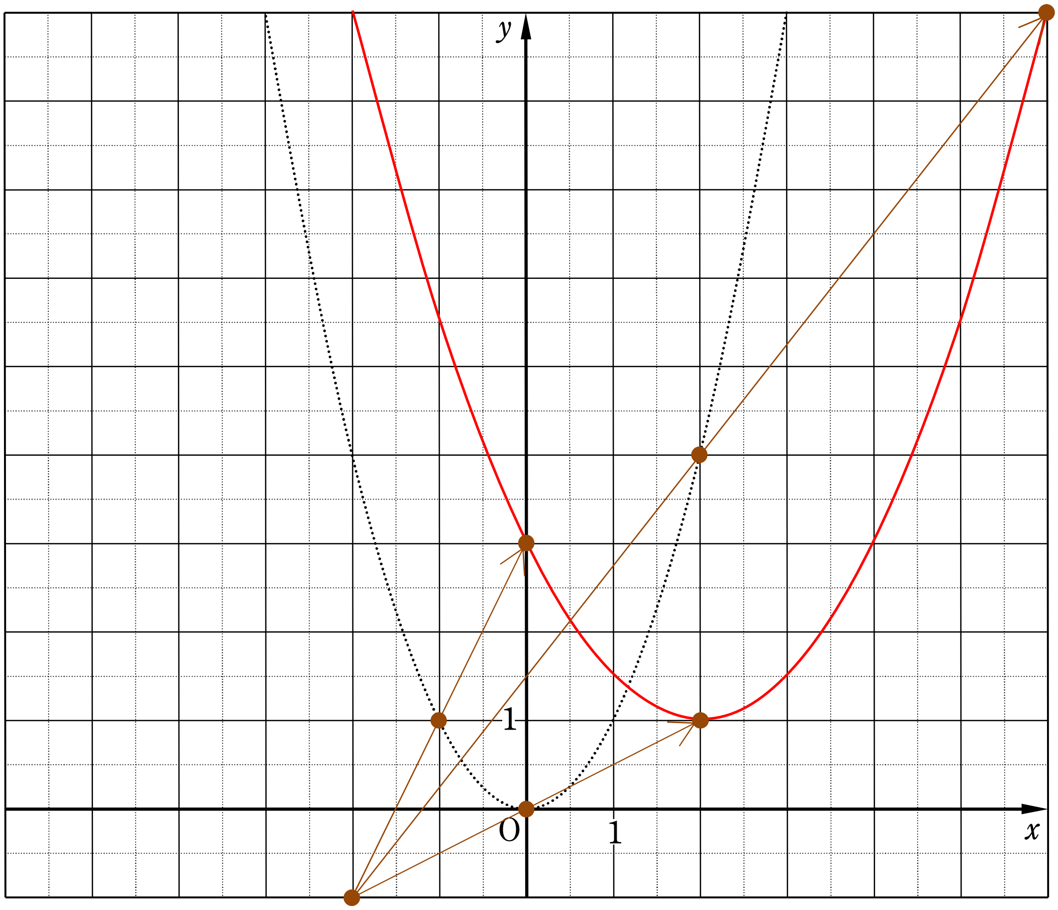
$$k(3k - 1) = 0$$

$$\therefore k = 0, \frac{1}{3}$$

$k > 0$ だから $k = \dfrac{1}{3}$ を得る。

以上より、$F$ は、O を中心として $C$ を $\boxed{\dfrac{1}{3}\text{倍}}$ に相似拡大した図形である。

## 問4.2



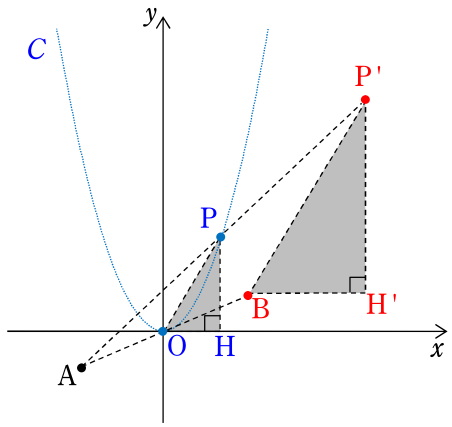

放物線$C: y=x^2$の原点 O を中心とした 2 倍の相似拡大が放物線$D_0: y=\frac{1}{2}x^2$であった（問4.1(2)）から、$C$の A を中心とした 2 倍の相似拡大$D$は、$D_0$と合同で下に凸な放物線である。
また、$D$の頂点は、$C$の頂点 O を A を中心として 2 倍に相似拡大した点となり、それはB(2,1)である。
以上より、$D$は

$$\boxed{y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1}$$

が表す放物線である。

$\boxed{\text{別解}}$ 問 4.1(2)の結果を前提とせずに論じてみよう。

$C$ 上の点 P を A$(-2,-1)$ 中心に 2 倍に相似拡大した点を P' とする。P' の軌跡が $D$ である。$C$ の頂点 O の A を中心とした 2 倍の相似拡大$(2,1)$ を B とする。また、P から $x$ 軸に下ろした垂線の足を H とし、H の A を中心とした 2 倍の相似拡大を H' とする。




△BP'H' は△OPH の A を中心とした 2 倍の相似拡大であり、

$$\mathrm{BH'} = 2\mathrm{OH}, \qquad \mathrm{P'H'} = 2\mathrm{PH}$$

が成り立つ。ここで、P は $C$ 上の点だから、

$$\mathrm{PH} = \mathrm{OH}^2$$

をみたす。これより、

$$\mathrm{P'H'} = 2\mathrm{PH} = 2\mathrm{OH}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

一方、

$$(\mathrm{BH'})^2 = (2\mathrm{OH})^2 = 4\mathrm{OH}^2 \quad \cdots\cdots ②$$

だから、①, ②より、

$$\mathrm{P'H'} = \frac{1}{2}(\mathrm{BH'})^2 \quad \cdots\cdots ③$$

となる。BH', P'H' はそれぞれ OH, PH と平行であり、したがって、それぞれ $x$ 軸、$y$ 軸と平行である。ゆえに③は、放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ を頂点が B になるように平行移動した放物線上に P' があることを意味する。P が $C$ をくまなく動くとき、P' もこの放物線をくまなく動くから、$D$ は放物線

$$\boxed{y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1}$$

である。

## 問4.3

求める M の軌跡を $E$ とする。

$E$ は、$C: y = x^2 - 4x + 6$ の原点 O を中心とした $\dfrac{1}{2}$ 倍の相似拡大である。$C$ を平行移動した放物線 $y = x^2$ の（原点を中心とした）$\dfrac{1}{2}$ 倍の相似拡大が放物線 $D: y = 2x^2$ であった（問 4.1(3)）から、$E$ は、$D$ と合同で下に凸な放物線である。また、$E$ の頂点は、$C$ の頂点を O を中心として $\dfrac{1}{2}$ 倍に相似拡大した点となる。

$C$ の式を平方完成すると、

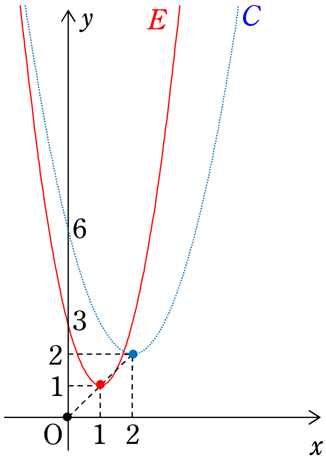
$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 4x + 4 + 2 \\
&= (x-2)^2 + 2
\end{aligned}
$$

となるから、$C$ の頂点は $(2,2)$ であり、したがって、$E$ の頂点は $(1,1)$ である。

以上より、$E$ は、

$$\boxed{y = 2(x-1)^2 + 1}$$

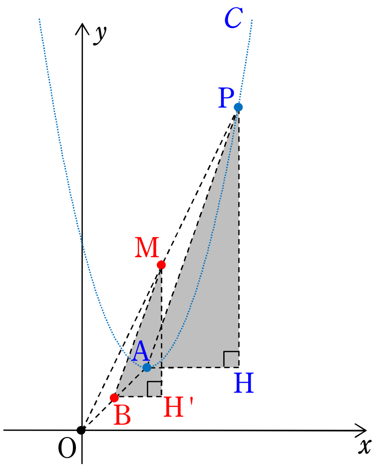
が表す放物線である。




別解　問 4.1(3)の結果を前提とせずに論じてみよう。

$C$ の頂点 $(2,2)$ を A とし(平方完成は上の通り)、A を通り $x$ 軸に平行な直線に、$C$ 上の点 P から下ろした垂線の足を H とする。また、

OA, OH の中点をそれぞれ B,  H' とする。




△BMH'は△APHのOを中心とした$\dfrac{1}{2}$倍の相似拡大であり、

$$\mathrm{BH'} = \frac{1}{2}\mathrm{AH}, \qquad \mathrm{MH'} = \frac{1}{2}\mathrm{PH}$$

が成り立つ。ここで、$C$は放物線$y = x^2$を平行移動したものであり、Pは$C$上の点だから、

$$\mathrm{PH} = \mathrm{AH}^2$$

をみたす。これより、

$$\mathrm{MH'} = \frac{1}{2}\mathrm{PH} = \frac{1}{2}\mathrm{AH}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

一方、

$$(\mathrm{BH'})^2 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{AH}\right)^2 = \frac{1}{4}\mathrm{AH}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

だから、①, ②より、

$$\mathrm{MH'} = 2(\mathrm{BH'})^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる。BH', MH'はそれぞれAH, PHと平行であり、したがって、それぞれ$x$軸、$y$軸と平行である。ゆえに③は、放物線$y = 2x^2$ を頂点がBになるように平行移動した放物線上にMがあることを意味する。Pが$C$をくまなく動くとき、Mもこの放物線をくまなく動くから、求めるMの軌跡は、放物線

$$\boxed{y = 2(x-1)^2 + 1}$$

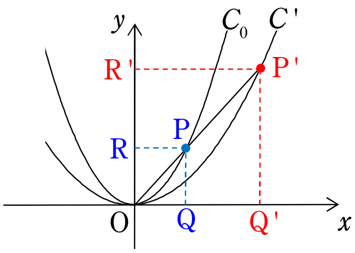
である。

## 問4.4

放物線 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ は、放物線 $C: y=ax^2$ を平行移動したものだから、これらは合同である。したがって、$C: y=ax^2$ が放物線 $C_0: y=x^2$ と相似であることを示せば、すべての 2 次関数のグラフが $C_0$ と相似であることがわかる。$a<0$ のときは、$x$ 軸に関して対称移動すれば、$C$ と $y=|a|x^2$ と合同であることが分かるので、以下、$a>0$ として考える。

まず、問 4.1(2)と同様に、$C_0$ を、原点 O を中心として $k$ 倍に相似拡大（$k>0$）した図形 $C'$ の式を求めておこう。

$C_0$ 上の点 P を O 中心に $k$ 倍に相似拡大した点を P' とする。P' の描く図形（軌跡）が $C'$ である。




P, P' から $x$ 軸に下ろした垂線の足を、それぞれ Q, Q' とし、P, P' から $y$ 軸に下ろした垂線の足を、それぞれ R, R' とする。

$$\mathrm{OP'}=k\mathrm{OP}$$

だから、

$$\mathrm{OQ'}=k\mathrm{OQ}, \qquad \mathrm{OR'}=k\mathrm{OR}$$

である。ここで、P は $C_0$ 上の点だから、

$$\mathrm{OR}=\mathrm{OQ}^2$$

をみたす。これより、

$$\mathrm{OR'}=k\mathrm{OR}=k\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

一方、

$$(\mathrm{OQ'})^2=(k\mathrm{OQ})^2=k^2\mathrm{OQ}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

だから、①, ②より、

$$\mathrm{OR'}=\frac{1}{k}(\mathrm{OQ'})^2$$

が成り立つ。これは P' が、

$$\text{放物線 } y=\frac{1}{k}x^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

上にあることを意味する。P が $C$ をくまなく動くとき、P' もこの放物線をくまなく動くから、$C'$ は③が表す放物線である。

ここで、

$$a=\frac{1}{k}$$

となるように$k=\dfrac{1}{a}$と選べば、$C'$は放物線$C:y=ax^2$と一致する。したがって、任意の放物線$C:y=ax^2$は、放物線$C_0:y=x^2$と相似である。

以上で、任意の放物線$y=ax^2+bx+c$は、$C_0:y=x^2$と相似であることが示された。

※　$\mathrm{OP}'=k\mathrm{OP}$を$\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と表現し、Q, Rのような垂線の足の代わりに、座標を使って論ずれば、$k<0$としてもよく、$a<0$の場合もまとめて論じることが出来る。