

中2数学C 2019年度2学期 本問解答

§5 放物線と接線

※ 欠席してしまった場合は、問 5.1, 問 5.3 を (余裕があれば残りの問題も) 自分で確認し、p.30 の宿題 H5.1～H5.3 に取り組んで提出してください。

問5.1

- (1) 直線 AB の式を $y = px + q$ とおくと、放物線 C との共有点の x 座標の方程式は、

$$x^2 - 4x + 6 = px + q$$

$$\therefore x^2 - 4x + 6 - (px + q) = 0 \dots\dots\dots ①$$

となる。①の解が A, B の x 座標 1, 5 だから、その左辺は

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 6 - (px + q) \\ = (x-1)(x-5) \end{aligned}$$

と因数分解される。これを整理すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (-p-4)x + (-q+6) \\ = x^2 - 6x + 5 \end{aligned}$$

となるから、両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases} -p-4=-6 & \therefore \begin{cases} p=2 \\ -q+6=5 \end{cases} \\ -q+6=5 \end{cases}$$

したがって、求める直線の式は、

$$\boxed{y = 2x + 1}$$

- (2) A における接線の式を $y = px + q$ とおくと、C との共有点の x 座標の方程式①が $x=1$ を重解にもつから、①の左辺は

$$x^2 - 4x + 6 - (px + q) = (x-1)^2$$

と因数分解される。これを整理すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (-p-4)x + (-q+6) \\ = x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

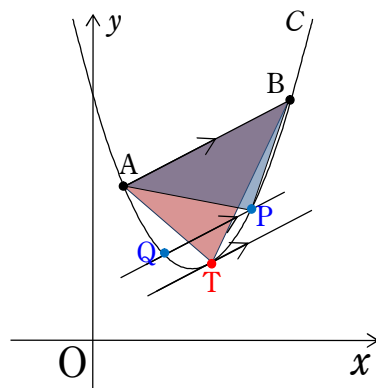
となるから、両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases} -p-4=-2 & \therefore \begin{cases} p=-2 \\ -q+6=1 \end{cases} \\ -q+6=1 \end{cases}$$

したがって、求める接線の式は、

$$\boxed{y = -2x + 5}$$

問5.2



放物線 $y = x^2 - 6x + 10$ を C とする。

AB の傾きは

$$\frac{10-5}{6-1} = \frac{5}{5} = 1$$

である。C 上の点で、その点における C の接線の傾きがこの 1 に等しくなる点を T とおく。

(T は C の弧 AB 上にある。)

C の弧 AB 上の点 P について、P を通り、傾きが 1 の直線と C が P 以外の交点 Q をもつとする。このとき、P と Q の間に T がある。よって、AB を底辺と見ると、P の高さより T の高さの方が大きくなり、

$$[\triangle ABP \text{ の面積}] < [\triangle ABT \text{ の面積}]$$

と分かる。したがって、 $\triangle ABP$ の面積が最大になるのは P が T と一致するときである。

T の x 座標を求めよう。傾き 1 の直線 $y = x + d$ が C と接するのは、共有点の x 座標の方程式

$$x^2 - 6x + 10 = x + d$$

$$\therefore x^2 - 7x + 10 - d = 0 \dots\dots\dots ①$$

が重解を持つときである。それは、①の左辺が

$$x^2 - 7x + 10 - d = (x - \alpha)^2$$

と表せるときであり、両辺の係数を比較して、

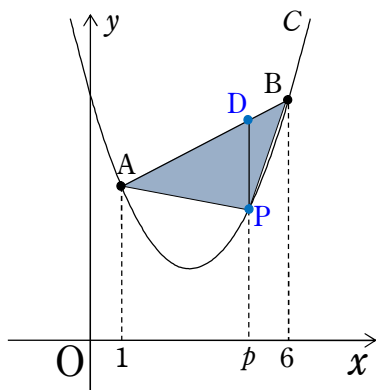
$$\begin{cases} -7 = -2\alpha \\ 10 - d = \alpha^2 \end{cases} \therefore \begin{cases} \alpha = \frac{7}{2} \\ d = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

このときの重解 $\alpha = \frac{7}{2}$ が T の x 座標である。

以上より、 $\triangle ABP$ の面積が最大となるときの点 P の x 座標 p の値は、

$$\boxed{p = \frac{7}{2}}$$

別解 (略解) まともに $\triangle ABP$ の面積 S を p の式で表すと次のようになる：



P を通り、 y 軸と平行な直線と AB との交点を D とする。 $\triangle PAB$ を $\triangle PAD$ と $\triangle PBD$ に分割し、PD を底辺と見て面積を計算する。

直線 AB の式は $y = x + 4$ となるから、D の y 座標は $p + 4$ であり、

$$\begin{aligned} PD &= (p + 4) - (p^2 - 6p + 10) \\ &= -p^2 + 7p - 6 \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} PD \times \{(p - 1) + (6 - p)\} = \frac{5}{2} PD \\ &= -\frac{5}{2} (p^2 - 7p + 6) \\ &= -\frac{5}{2} \left\{ \left(p - \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{49}{4} + 6 \right\} \\ &= -\frac{5}{2} \left(p - \frac{7}{2} \right)^2 + \frac{125}{8} \end{aligned}$$

となる。 p の動く範囲は $1 < p < 6$ だから、 S は

$$\boxed{p = \frac{7}{2}}$$

のとき最大値 $\frac{125}{8}$ をとる。

問5.3

まず、山の稜線の放物線の式を求める。

x 切片が $-2, 2$ であることから、

$$y = a(x+2)(x-2)$$

とおける。展開すると、

$$y = a(x^2 - 4)$$

$$= ax^2 - 4a$$

となるが、頂点が $A(0,1)$ だから、

$$-4a = 1, \therefore a = -\frac{1}{4}$$

したがって、山の稜線の式は

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$$

である。

さて、 P にいる人が打ち上げられた気球をはじめて目にするときの気球の位置を K とすると、直線 PK は山の稜線に接する直線となる。その傾きを k とすると、 $P\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ を通る

ことから、直線 PK の式は

$$y = k\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

とおける。山の稜線との接点の x 座標を t ($0 < t < 2$) とすると、 x の方程式

$$-\frac{1}{4}x^2 + 1 - k\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0$$

が $x = t$ を重解にもつから、この左辺は

$$-\frac{1}{4}x^2 + 1 - k\left(x - \frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4}(x-t)^2$$

と因数分解される。これを整理すると、

$$-\frac{1}{4}x^2 - kx + \left(\frac{5}{2}k + 1\right) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}tx - \frac{1}{4}t^2$$

となるから、両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases} -k = \frac{1}{2}t & \dots\dots ① \\ \frac{5}{2}k + 1 = -\frac{1}{4}t^2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①より、 $k = -\frac{1}{2}t$

②に代入して、

$$-\frac{5}{4}t + 1 = -\frac{1}{4}t^2$$

$$\frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{4}t + 1 = 0$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$(t-1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 1, 4$$

$0 < t < 2$ だから $t = 1$

よって $k = -\frac{1}{2}$

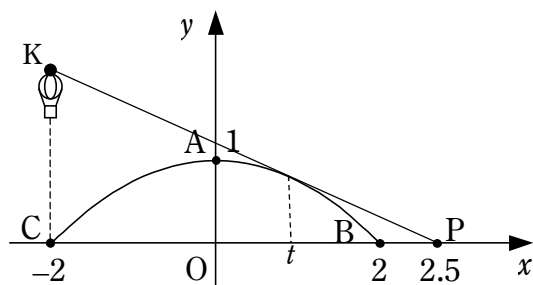
ゆえに直線 PK の式は

$$y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

であり、ここに C の x 座標 $x = -2$ を代入して、 K の y 座標は、

$$y = -\frac{1}{2}\left(-2 - \frac{5}{2}\right) = \boxed{\frac{9}{4}} \text{ (km)}$$

であり、これが求める気球の高さである。



問5.4

$y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ が表す放物線をそれぞれ C , D とする。

C の (原点を中心とした) 2 倍の相似拡大が放物線 $E: y = \frac{1}{2}x^2$ であった (§4)。 D は E を平行移動した放物線であるから、やはり、ある点 A を中心とした C の 2 倍の相似拡大になっている。

D の式を平方完成すると、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1 - 1 + 3) \\ &= \frac{1}{2}\{(x-1)^2 + 2\} \\ &= \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

となるから、 D の頂点は $B(1,1)$ である。 C の頂点 $O(0,0)$ を、 A を中心として 2 倍に相似拡大した点が B になるので、 AB の中点が O であり、 A の座標は $(-1,-1)$ と分かる。

ここで、 l を C のある接線とすると、 l の A を中心とする 2 倍の相似拡大は D の接線になる。(cf. 問 4.1(1)において C とその $(1,1)$ における接線 l を相似拡大したものが、 D とその $(2,2)$ における接線 m になっていたことを思い出そう。) したがって、 l が点 A を通れば、 l の A を中心とする 2 倍の相似拡大は l 自身であるから、それは C と D の共通接線となる。したがって、 C と D の共通接線とは、相似の中心 A を通る C の接線 (それは確かに 2 本ある) であり、その交点は $A(-1,-1)$ である。

