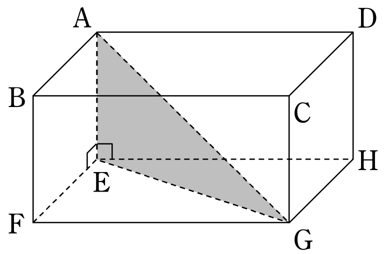
中2数学C 2019年度2学期 本問解答
§6 垂直条件

※ 欠席してしまった場合は、本問をすべて自分で確認し、p.36 の宿題 H6.1～H6.3 に取り組んで提出してください。

問6.1

(1)



AEHD は長方形なので

$AE \perp EH$ ……………… ①

ABFE は長方形なので

$AE \perp EF$ ……………… ②

EH, EF は平行でないから、①, ②より

$AE \perp$ 面EFGH ……………… ③

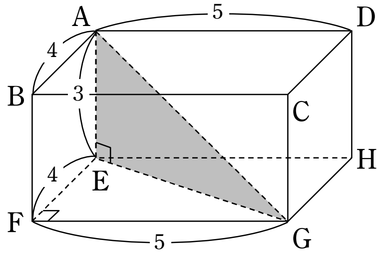
③より、

$AE \perp EG$

すなわち、$\angle AEG = 90°$ (q.e.d.)

(2) (1)より、AG は直角三角形 AEG の斜辺だから、ピタゴラスの定理より、

$AG^2 = EG^2 + AE^2$ ……………… ④



EG は直角三角形 EFG の斜辺なので、ピタゴラスの定理より、

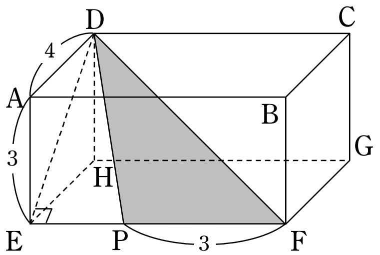
$EG^2 = EF^2 + FG^2$ ……………… ⑤

④, ⑤より

$$\begin{aligned} AG^2 &= EF^2 + FG^2 + AE^2 \\ &= AB^2 + AD^2 + AE^2 \\ &= 16 + 25 + 9 = 50 \end{aligned}$$

$\therefore AG = \sqrt{50} = \boxed{5\sqrt{2}}\ (>0)$

問6.2



AEFB は長方形なので　　$EF \perp AE$ ………①
HEFG は長方形なので　　$EF \perp HE$ ………②
AE, HE は平行でないから、①, ②より、

$$EF \perp 面AEHD \quad \therefore EF \perp DE$$

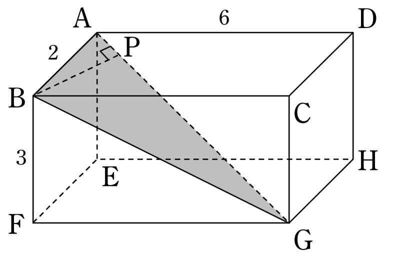
したがって、△DPF の PF を底辺としたときの高さは DE と分かり、

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\therefore \triangle DPF = \frac{1}{2} \times PF \times DE = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = \boxed{\frac{15}{2}}$$

問6.3

(1)



ABCD は長方形なので　$AB \perp BC$ ····①

ABFE は長方形なので　$AB \perp BF$ ····②

BC, BF は平行でないから、①, ②より、

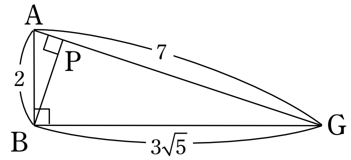
$$AB \perp 面BCGF \quad \therefore AB \perp BG$$

と分かる。直角三角形 ABG に注目すると、△BAG と△PAB において

$\angle ABG = \angle APB$ （$=90°$）

$\angle BAG = \angle PAB$ （共通）

$\therefore \triangle ABG \backsim \triangle APB$ （二角相等）



対応辺の比は等しいので、

$AB : AG = AP : AB$ ··························· ③

BG は長方形 BFGC の対角線なので、ピタゴラスの定理より、

$$BG^2 = BF^2 + FG^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

△ABG にピタゴラスの定理を用いて、

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 = 2^2 + 45 = 49$$

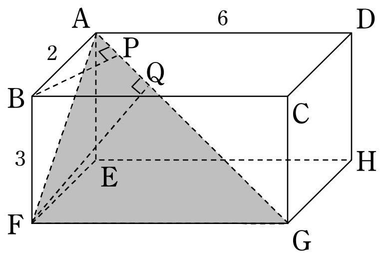
$\therefore AG = 7\ (>0)$

したがって、③より、

$$2 : 7 = AP : 2$$

$$\therefore AP = 2 \times \frac{2}{7} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

(2)



BFGC は長方形なので　$GF \perp BF$ ····④

EFGH は長方形なので　$GF \perp EF$ ····⑤

BF, EF は平行でないから、④, ⑤より、

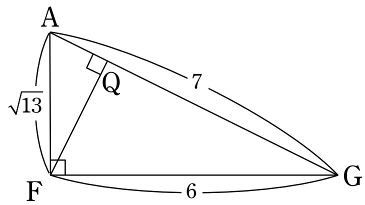
$$GF \perp 面ABFE \quad \therefore GF \perp AF$$

と分かる。直角三角形 AFG に注目すると、△AFG と△AQF において

$\angle AFG = \angle AQF$ （$=90°$）

$\angle FAG = \angle QAF$ （共通）

$\therefore \triangle AFG \backsim \triangle AQF$ （二角相等）



対応辺の比は等しいので、

$AF : AG = AQ : AF$ ··························· ⑥

AF は長方形 ABFE の対角線なので、ピタゴラスの定理より

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$\therefore AF = \sqrt{13}\ (>0)$

したがって、⑥より

$$\sqrt{13} : 7 = AQ : \sqrt{13}$$

$$\therefore AQ = \sqrt{13} \times \frac{\sqrt{13}}{7} = \frac{13}{7}$$

よって、

$$PQ = AQ - AP = \frac{13}{7} - \frac{4}{7} = \frac{9}{7}$$

$$QG = AG - AQ = 7 - \frac{13}{7} = \frac{36}{7}$$

であり、

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}:\mathrm{QG}=\frac{4}{7}:\frac{9}{7}:\frac{36}{7}=\boxed{4:9:36}$$

※ 直方体 ABCD-EFGH の対角線 AG に、B, F から下した垂線の足をそれぞれ P, Q とするとき、

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}:\mathrm{QG}=\mathrm{AB}^2:\mathrm{BF}^2:\mathrm{FG}^2$$

が成り立つ。