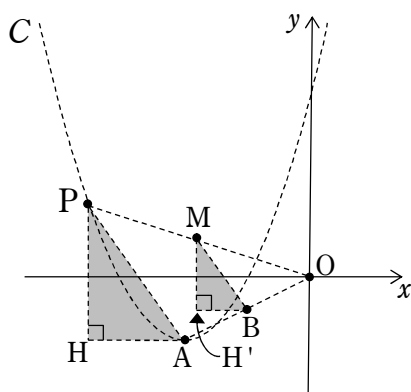


中2数学C 2019年度2学期 宿題解答

§4 放物線と相似拡大

H4.1



放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$ を C とし、求める中点

M の軌跡を D とする。

C の式を平方完成すると、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x^2 + 8x) + 6 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 16) - \frac{1}{2} \times 16 + 6 \\ &= \frac{1}{2}(x + 4)^2 - 2 \end{aligned}$$

だから、 C の頂点は $A(-4, -2)$ である。 OA の中点 $(-2, -1)$ を B とする。 A を通り x 軸に平行な直線に P から下ろした垂線の足を H とし、 OH の中点を H' とする。 $\triangle BMH'$ は $\triangle APH$ の O を中心とした $\frac{1}{2}$ 倍の相似拡大であり、

$$BH' = \frac{1}{2} AH, \quad MH' = \frac{1}{2} PH$$

が成り立つ。ここで、 C は放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ を平行移動したものであり、 P は C 上の点だから、

$$PH = \frac{1}{2} AH^2$$

をみたす。これより、

$$\text{MH}' = \frac{1}{2} \text{PH} = \frac{1}{4} \text{AH}^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

一方、

$$(BH')^2 = \left(\frac{1}{2}AH\right)^2 = \frac{1}{4}AH^2 \dots\dots\dots ②$$

だから、①、②より、

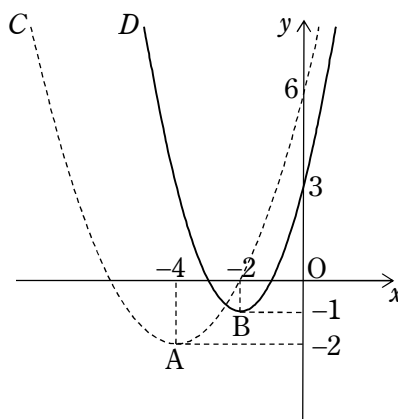
$$MH' = (BH')^2 \dots\dots\dots (3)$$

となる。 BH' , MH' はそれぞれ AH , PH と平行であり、したがって、それぞれ x 軸、 y 軸と平行である。ゆえに③は、放物線 $y = x^2$ を頂点が B になるように平行移動した放物線上に M があることを意味する。 P が C をくまなく動くとき、 M もこの放物線をくまなく動くから、この放物線が求める軌跡 D であり、その式は、

$$\boxed{y = (x + 2)^2 - 1}$$

である。

※ D は C の O を中心とした $\frac{1}{2}$ 倍の相似拡大である。(問 4.1(2)や問 4.4 から) C を平行移動した $y = \frac{1}{2}x^2$ の O を中心とした $\frac{1}{2}$ 倍の相似拡大が $y = x^2$ であることを認めると、 D は $y = x^2$ を平行移動した放物線で頂点が B であるものと直ちに分かる。



H4.2

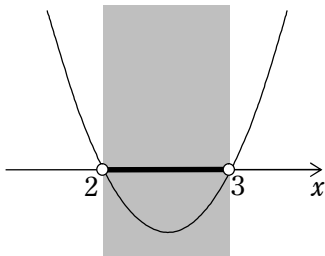
(1) $x^2 - 5x + 6 < 0$ ……①

の解は、 $y = x^2 - 5x + 6$ のグラフで y 座標が負となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求める、

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2, 3$$



よって、図より、①の解は

$$2 < x < 3$$

(2) $-x^2 + 2x + 24 < 0$ ……①

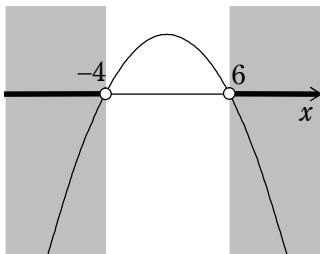
の解は、 $y = -x^2 + 2x + 24$ のグラフで y 座標が負となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求める、

$$-x^2 + 2x + 24 = 0$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x+4)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -4, 6$$



よって、図より、①の解は

$$x < -4, \quad 6 < x$$

(3) $x^2 - 4x - 1 \geq 0$ ……①

の解は、 $y = x^2 - 4x - 1$ のグラフで y 座標が 0 以上となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求める、

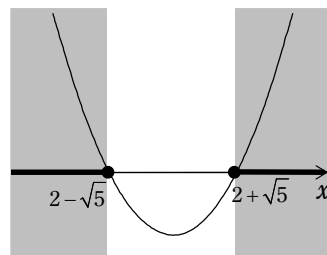
$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 1 + 4$$

$$(x-2)^2 = 5$$

$$x-2 = \pm\sqrt{5}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{5}$$



よって、図より、①の解は

$$x \leq 2 - \sqrt{5}, \quad 2 + \sqrt{5} \leq x$$

(4) $-x^2 - 3x + 1 > 0$ ……①

の解は、 $y = -x^2 - 3x + 1$ のグラフで y 座標が正となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求めると、

$$-x^2 - 3x + 1 = 0$$

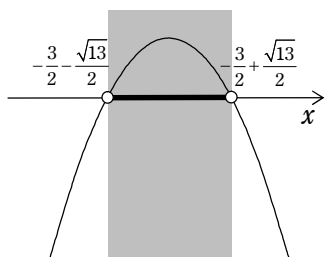
$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

$$x + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$



よって、図より、①の解は

$$-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} < x < -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

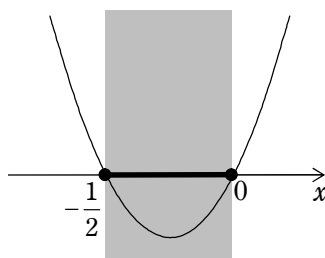
(5) $2x^2 + x \leq 0$ ……①

の解は、 $y = 2x^2 + x$ のグラフで y 座標が 0 以下となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求めると、

$$2x^2 + x = 0$$

$$x(2x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 0, -\frac{1}{2}$$



よって、図より、①の解は

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$$

(6) $x^2 + 3x + 5 \geq 0$ ……①

の解は、 $y = x^2 + 3x + 5$ のグラフで y 座標が 0 以上となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求めようとする、

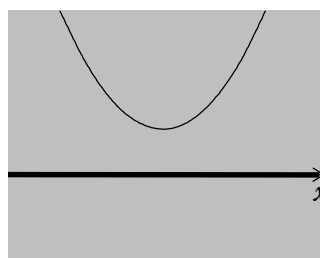
$$x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = -5 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{11}{4}$$

となり、これをみたす実数は存在しない。

($y = x^2 + 3x + 5$ のグラフの x 切片は存在しない。)



よって、図より、①の解は

全実数

