中2数学C 2019年度2学期 宿題解答
§5 放物線と接線

H5.1

(1) 求める接線の式を $y=px+q$ とおくと、放物線との共有点の x 座標の方程式

$$x^2-x+2-(px+q)=0$$

が $x=-3$ を重解にもつ。よって、この左辺は

$$x^2-x+2-(px+q)=(x+3)^2$$

と因数分解される。これを整理すると、

$$x^2+(-p-1)x+(-q+2)$$
$$=x^2+6x+9$$

となるから、両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases}-p-1=6\\-q+2=9\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}p=-7\\q=-7\end{cases}$$

したがって、求める接線の式は、

$$\boxed{y=-7x-7}$$

(2) 求める接線の式を $y=px+q$ とおくと、放物線との共有点の x 座標の方程式

$$2x^2-3x+7-(px+q)=0$$

が $x=1$ を重解にもつ。よって、この左辺は

$$2x^2-3x+7-(px+q)=2(x-1)^2$$

と因数分解される。これを整理すると、

$$2x^2+(-p-3)x+(-q+7)$$
$$=2x^2-4x+2$$

となるから、両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases}-p-3=-4\\-q+7=2\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}p=1\\q=5\end{cases}$$

したがって、求める接線の式は、

$$\boxed{y=x+5}$$

H5.2

放物線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=kx-4$ の接点の x 座標を t とすると、x の方程式

$$x^2-2x-(kx-4)=0$$

が $x=t$ を重解にもつから、この左辺は

$$x^2-2x-(kx-4)=(x-t)^2$$

と因数分解される。これを整理すると、

$$x^2+(-k-2)x+4=x^2-2tx+t^2$$

となるから、両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases}-k-2=-2t\cdots\cdots①\\4=t^2\qquad\cdots\cdots②\end{cases}$$

②より，$t=\pm2$
①に代入して、

$t=2$ のとき $-k-2=-4$，$\therefore k=2$

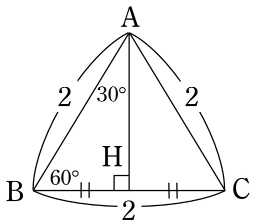
$t=-2$ のとき $-k-2=4$，$\therefore k=-6$

したがって、求める k の値は

$$\boxed{k=2,\ -6}$$

H5.3

△ABC の頂点 A から辺 BC に下した垂線の足を H とする。$AB=AC$ より、A から BC への垂線と中線は一致するので、H は辺 BC の中点でもあり、$BH=CH=1$ である。



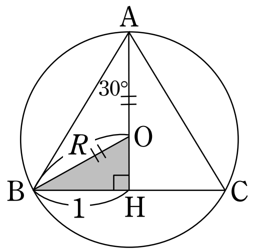
(1) △ABH は 30°,60°,90° の三角定規の形で、

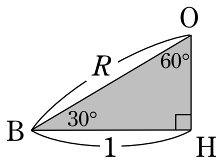
$$AH=\sqrt{3}BH=\sqrt{3}$$

したがって、

$$S=\frac{1}{2}\times BC\times AH=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\boxed{\sqrt{3}}$$

(2)





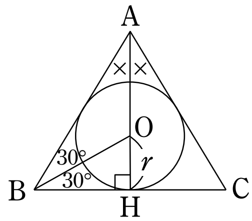
外接円の中心 O は、辺 BC の垂直二等分線 AH 上の点であり、$OA=OB$ を満たすので、

$$\begin{aligned}\angle BOH &= \angle OBA+\angle OAB\\ &\quad (\triangle OAB\text{に外角定理})\\ &= 2\times\angle OAB\\ &= 2\times 30^\circ = 60^\circ\end{aligned}$$

したがって、△BOH は 30°,60°,90° の三角定規の形で、

$$R=OB=\frac{2}{\sqrt{3}}BH=\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

(3) (2)の O に対して、$\angle OBA=\angle OBC=30^\circ$ なので、直線 BO は∠B の二等分線になっている。また、$AB=AC$ より、A から BC への垂線 AH は∠A の二等分線と一致する。よって、内接円の中心は、直線 AH と直線 BO の交点 O であり、内接円の半径は OH である。



したがって、

$$r=OH=\frac{1}{\sqrt{3}}BH=\frac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

※ △ABC の面積を利用して内接円の半径を求めることもできる。