

中2数学C 2019年度2学期 宿題解答

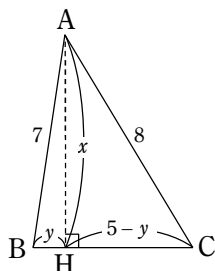
§6 垂直条件

H6.1

(1) $AH = x, BH = y$ とおくと、

$$CH = BC - BH = 5 - y$$

である。



△ABH にピタゴラスの定理を用いて、

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$\therefore 7^2 = x^2 + y^2 \dots\dots\dots ①$$

△ACH にピタゴラスの定理を用いて、

$$AC^2 = AH^2 + CH^2$$

$$\therefore 8^2 = x^2 + (5 - y)^2 \dots\dots\dots ②$$

① - ② より、

$$49 - 64 = y^2 - (5 - y)^2 \dots\dots\dots ③$$

③を解くと、

$$-15 = y^2 - (25 - 10y + y^2)$$

$$-15 = y^2 - 25 + 10y - y^2$$

$$10 = 10y$$

$$y = 1$$

なので、①より

$$x^2 = 49 - 1^2 = 48$$

$$\therefore x = 4\sqrt{3} (> 0)$$

よって、

$$AH = \boxed{4\sqrt{3}}, BH = \boxed{1}, CH = 5 - 1 = \boxed{4}$$

(2) △ACH は

$$\angle AHC = 90^\circ$$

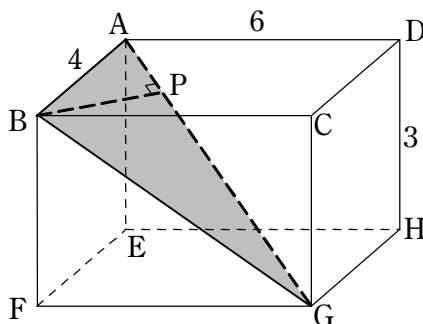
$$AC : CH = 8 : 4 = 2 : 1$$

より、 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角定規の形であると分かる。よって、

$$\angle ACB = \angle ACH = \boxed{60^\circ}$$

H6.2

(1)



ABCD は長方形なので $AB \perp BC \dots\dots ①$

ABFE は長方形なので $AB \perp BF \dots\dots ②$

BC, BF は平行でないから、①、②より、

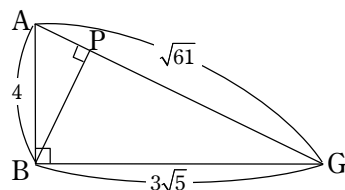
$$AB \perp \text{面 BCGF} \quad \therefore AB \perp BG$$

と分かる。直角三角形 ABG に注目すると、△ABG と△APB において

$$\angle ABG = \angle APB \quad (= 90^\circ)$$

$$\angle BAG = \angle PAB \quad (\text{共通})$$

$$\therefore \triangle ABG \sim \triangle APB \quad (\text{二角相等})$$



対応辺の比は等しいので、

$$AG : GB = AB : BP \dots\dots\dots ③$$

GB は長方形 BFGC の対角線なので、ピタゴラスの定理より、

$$GB^2 = BF^2 + FG^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

△ABG にピタゴラスの定理を用いて、

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 = 4^2 + 45 = 61$$

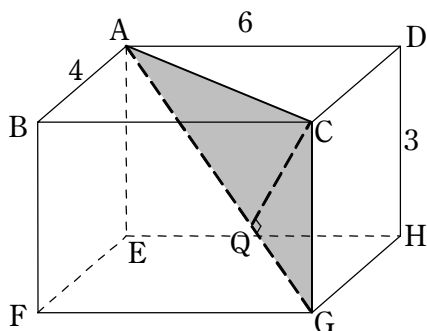
$$\therefore AG = \sqrt{61} (> 0)$$

したがって、③より、

$$\sqrt{61} : 3\sqrt{5} = 4 : BP$$

$$\therefore BP = \frac{3\sqrt{5} \times 4}{\sqrt{61}} = \frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{61}} = \boxed{\frac{12\sqrt{305}}{61}} \dots\dots ④$$

(2)



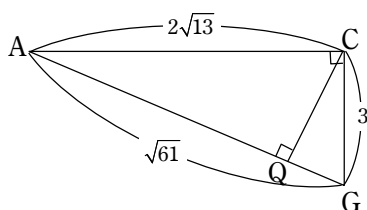
まず、CQ を求めよう。

(1)と同様に $CG \perp CB$, $CG \perp CD$ より、
 $CG \perp \text{面} ABCD \quad \therefore AC \perp CG$

である。CQ は C から AG へ下ろした垂線だから、やはり(1)と同様に、

$\triangle ACG \sim \triangle CQG$ (二角相等)

$\therefore AG : AC = CG : CQ \dots\dots\dots ⑤$



AC は長方形 ABCD の対角線なので、ピタゴラスの定理より、

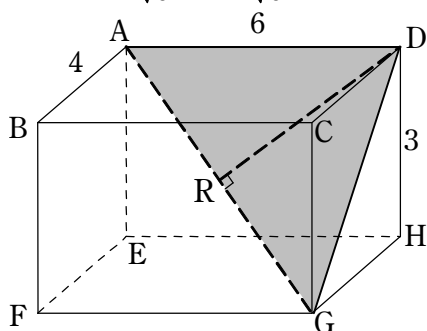
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 6^2 = 52$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{13} (> 0)$$

したがって、⑤より、

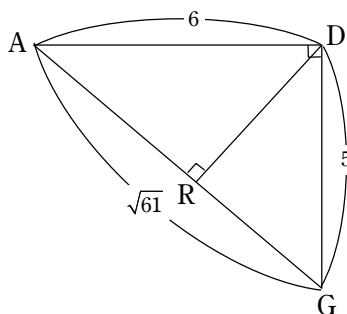
$$\sqrt{61} : 2\sqrt{13} = 3 : CQ$$

$$\therefore CQ = \frac{2\sqrt{13} \times 3}{\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{13}}{\sqrt{61}} \dots\dots\dots ⑥$$



次に、DR を求めよう。

(1)と同様に $AD \perp DC$, $AD \perp DH$ より、
 $AD \perp \text{面} CDHG \quad \therefore AD \perp DG$
 である。



DR は D から AG へ下ろした垂線だから、やはり(1)と同様に、

$\triangle ADG \sim \triangle DRG$ (二角相等)

より、

$$AG : AD = DG : DR$$

$$\sqrt{61} : 6 = 5 : DR$$

$$\therefore DR = \frac{6 \times 5}{\sqrt{61}} = \frac{30}{\sqrt{61}} \dots\dots\dots ⑦$$

以上、④、⑥、⑦より、

$$BP : CQ : DR = \frac{6 \times 2\sqrt{5}}{\sqrt{61}} : \frac{6 \times \sqrt{13}}{\sqrt{61}} : \frac{6 \times 5}{\sqrt{61}}$$

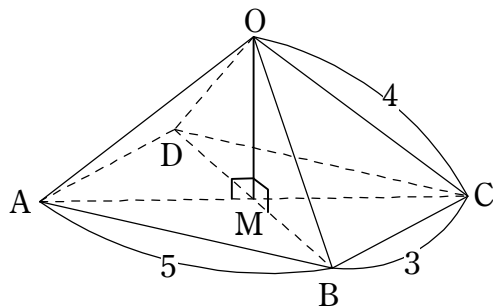
$$= 2\sqrt{5} : \sqrt{13} : 5$$

$$= \sqrt{20} : \sqrt{13} : \sqrt{25}$$

$$\therefore \boxed{DR > BP > CQ}$$

H6.3

(1)



ABCD は長方形なので M は A, C の中点である。△OAC は $OA = OC$ の二等辺三角形だから、中線 OM は O から AC へ下ろした垂線と一致する。

$$OM \perp AC \quad \text{..... ①}$$

同様に、M が B, D の中点で、△OBD が $OB = OD$ の二等辺三角形であることから、

$$OM \perp BD \quad \text{..... ②}$$

AC と BD は平行でないから、①, ②より、

$$OM \perp \text{面} ABCD \quad \text{..... ③}$$

(q.e.d.)

(2) ③より、ABCD を底面とみたときの四角錐 O-ABCD の高さは OM である。
まず、△ABC にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 5^2 + 3^2 = 34 \end{aligned}$$

$$\therefore AC = \sqrt{34} (> 0)$$

したがって、

$$AM = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

次に、△OMA にピタゴラスの定理を用いて、

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

$$OM^2 = OA^2 - AM^2$$

$$\begin{aligned} &= 4^2 - \left(\frac{\sqrt{34}}{2} \right)^2 = 16 - \frac{34}{4} \\ &= \frac{64 - 34}{4} = \frac{30}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore OM = \frac{\sqrt{30}}{2} (> 0)$$

したがって、O-ABCD の体積は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \times (\text{ABCD の面積}) \times OM \\ &= \frac{1}{3} \times AB \times BC \times OM \\ &= \frac{1}{3} \times 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{30}}{2} \\ &= \boxed{\frac{5\sqrt{30}}{2}} \end{aligned}$$