

中2数学B 2019年度2学期 本問解答

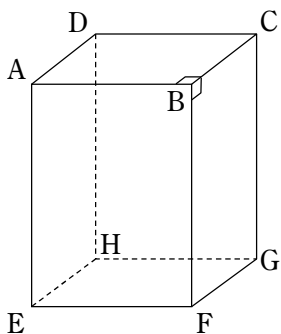
§9 直線と平面のなす角・二面角

※ 欠席してしまった場合は、問 9.1～問 9.3 を自分で確認し、p.27 の宿題 H9.1, H9.2 に取り組んで提出してください。

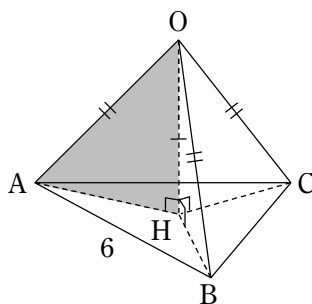
問9.1

- (1) 面 ABCD と面 BFGC のなす角は
 $AB \perp BC$, $FB \perp BC$

より、 $\angle ABF = 90^\circ$ である。他の隣り合う 2 面についても同様に、そのなす角は 90° である。



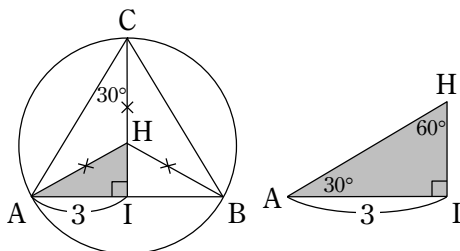
- (2) O から面 ABC に下した垂線の足を H とすると、 $\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$ (斜辺一辺相等) なので、 $AH = BH = CH$ であり、H は $\triangle ABC$ の外心となる。



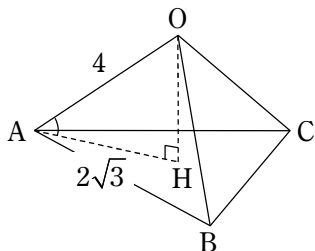
CH と AB の交点を I とすると、 $\triangle AHI$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角定規の形であり、

$$IH = \frac{1}{\sqrt{3}} AI = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3 = \sqrt{3}$$

$$AH = \frac{2}{\sqrt{3}} AI = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 3 = 2\sqrt{3}$$



- (i) 辺 OA と面 ABC のなす角は、 $\angle OAH$ である。



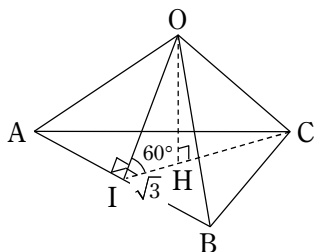
$$OA : AH = 4 : 2\sqrt{3} = 2 : \sqrt{3},$$

$$\angle OHA = 90^\circ$$

より、 $\triangle OAH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角定規の形であり、 $\angle OAH = \boxed{30^\circ}$

- (ii) $OI \perp AB, CI \perp AB$

なので、面 OAB と面 ABC のなす角は $\angle OIC$ である。



$\triangle OIH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角定規の形であり、

$$OI = 2 \times HI = 2\sqrt{3}$$

よって、 $\triangle OAI$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{OI^2 + AI^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{21}} \end{aligned}$$

問9.2

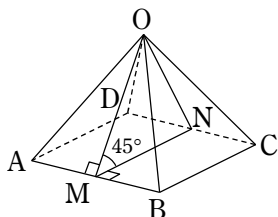
AB の中点を M、DC の中点を N とすると、
△OAB において

OA = OB, AM = BM より、OM ⊥ AB

正方形 ABCD において

AM = BM, DN = CN より、MN ⊥ AB

したがって、面 OAB と面 ABCD のなす角は
∠OMN である。



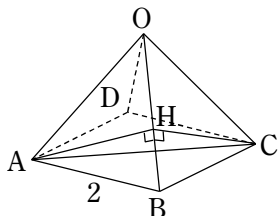
△OAB ≡ △OCB (三辺相等) なので、A から
OB に下した垂線の足と、C から OB に下した
垂線の足が一致することが分かる。この点
を H とおくと、

AH ⊥ OB, CH ⊥ OB

なので、面 OAB と面 OBC のなす角は∠AHC
であり、また、

AH = CH

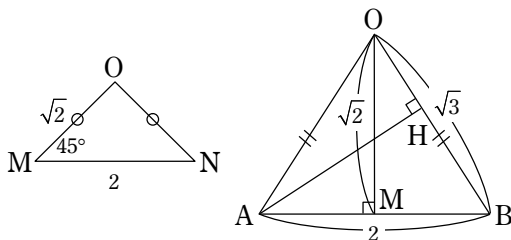
であることも分かる。



以下、二等辺三角形 AHC に注目して、∠AHC
を求めよう。

OM = ON, ∠OMN = 45° より △OMN は直角二
等辺三角形で、

$$OM = \frac{1}{\sqrt{2}} MN = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



よって、△OBM にピタゴラスの定理を用い
て、

$$\begin{aligned} OB &= \sqrt{OM^2 + BM^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

△OAB の面積に注目して、

$$\frac{1}{2} \times AB \times OM = \frac{1}{2} \times OB \times AH$$

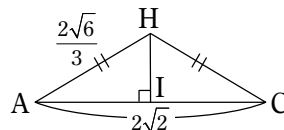
$$2 \times \sqrt{2} = \sqrt{3} \times AH$$

$$AH = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

AC は、正方形 ABCD の対角線なので

$$AC = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2}$$

ゆえに、△AHC は下図のようにになっている。



H から AC に下した垂線の足を I とすると、I
は AC の中点であり、

$$\begin{aligned} AH : AI &= \frac{2\sqrt{6}}{3} : \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{3} : \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{3} : 3 = 2 : \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\angle AIH = 90^\circ$$

よって、△AHI は 30°, 60°, 90° の三角定規の形
で、∠AHI = 60° である。

以上より、

$$\angle AHC = 2 \times \angle AHI = 2 \times 60^\circ = \boxed{120^\circ}$$

問9.3

AH⊥面HBCだから、AHを含む平面はすべて面HBCと垂直である。直感的には、その中から、面ABCと面HBCの交線BCと垂直なものが選べるはずである。その平面とBCとの交点をIとすると、∠AIHが面ABCと面HBCのなす角である。

AからBCに下ろした垂線の足をIとする:

$$AI \perp BC \quad \text{..... ①}$$

AH⊥BH, AH⊥CH, BH//CHより、

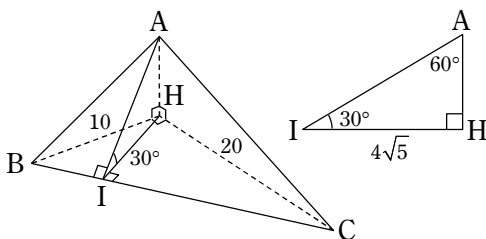
AH⊥面HBCだから、

$$AH \perp BC \quad \text{..... ②}$$

①, ②より、BC⊥面AHIだから、

$$HI \perp BC \quad \text{..... ③}$$

①, ③より、面ABCと面HBCのなす角は∠AIHである。



△AIHは

$$AH \perp HI, \angle AIH = 30^\circ$$

より、30°, 60°, 90°の三角定規の形なので、

$$AI = \frac{2}{\sqrt{3}} HI \quad \text{..... ④}$$

HIを求めればAIがわかり、△ABCの面積も求まる。△HBCにピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{BH^2 + CH^2} \\ &= \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5} \end{aligned}$$

△HBCの面積に注目して、

$$\frac{1}{2} \times BH \times CH = \frac{1}{2} \times BC \times HI$$

$$10 \times 20 = 10\sqrt{5} \times HI$$

$$HI = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

よって、④より

$$AI = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{20}{\sqrt{5}}$$

で、

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AI \\ &= \frac{1}{2} \times 10\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{20}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{200}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{200\sqrt{3}}{3}} \end{aligned}$$