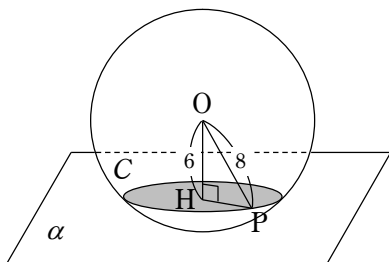


中2数学B 2019年度2学期 本問解答

§10 球

※ 欠席してしまった場合は、問 10.1 を（余裕があれば問 10.2 も）自分で確認し、p.31 の宿題 H10.1, H10.2 に取り組んで提出してください。

問10.1



C 上に点 P を取ると、ピタゴラスの定理より

$$HP = \sqrt{OP^2 - OH^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$$

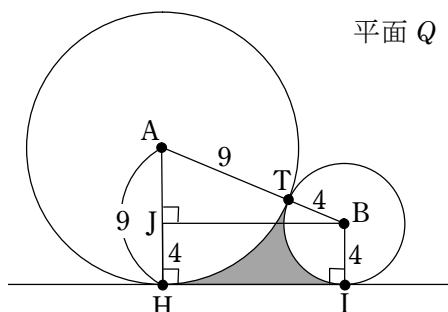
が成り立つので、C は H を中心とする半径 $2\sqrt{7}$ の円である。よって、切り口の面積は

$$\pi \times (2\sqrt{7})^2 = \boxed{28\pi}$$

※ 上記の解答は、実質テキスト p.28 の定理 (1) の証明になっている。

問10.2

- (1) AH, BI はともに平面 P に垂直であるから、同一平面上にある。その平面を Q とすると、2つの球の接点 T は線分 AB 上にあるから、やはり Q 上にある。



点 B から AH に下ろした垂線の足を J とすると、 $BJHI$ は長方形で、

$$AJ = AH - JH = AH - BI = 9 - 4 = 5$$

また、

$$AB = AT + BT = 9 + 4 = 13$$

だから、三角形 ABJ にピタゴラスの定理を用いて、

$$BJ^2 = AB^2 - AJ^2 = 169 - 25 = 144,$$

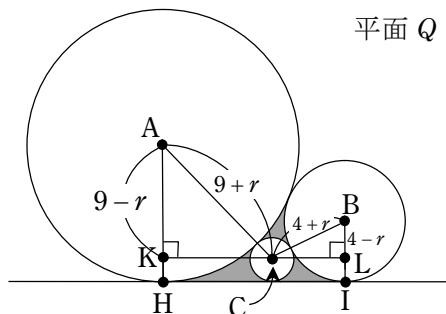
$$\therefore BJ = \sqrt{144} = 12 (> 0)$$

したがって、

$$HI = BJ = \boxed{12}$$

- (2) 球 A, B と平面 P が作る隙間を通り抜けることができる球は、「隙間」の平面 Q による断面 ((1)の図の網掛け部分) も当然通り抜けることができる。逆に、「隙間」の Q による断面にその大円 (球をその中心をとる平面で切った断面の円) が収まるような球は、その状態から、 Q に対し垂直な方向に動かすことによって、球 A, B と平面 P の間を通り抜けさせることができる。なぜなら、 Q と平行な平面による断面を考えると、球 A, B の断面は、(1)の図と中心が一致し半径がより小さい円になり、(1)の網掛け部分より「隙間」の断面が大きくなるからである。

したがって、球 A, B と平面 P の間を通り抜けることができる半径最大の球とは、平面 Q 上で球 A, B と平面 P に接する球である。それを球 C とし、その半径を r とおく。



点 C から AH, BI に下ろした垂線の足をそれぞれ K, L とする。(1)と同様に考えると、

$$AC = 9 + r, \quad AK = 9 - r$$

であるから、三角形 ACK にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned} KC^2 &= AC^2 - AK^2 \\ &= (9 + r)^2 - (9 - r)^2 \\ &= 4 \cdot 9 \cdot r = 36r, \end{aligned}$$

$$\therefore KC = 6\sqrt{r} (> 0)$$

同様に、三角形 BCL にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned} LC^2 &= BC^2 - BL^2 \\ &= (4 + r)^2 - (4 - r)^2 \\ &= 4 \cdot 4 \cdot r = 16r, \end{aligned}$$

$$\therefore LC = 4\sqrt{r} (> 0)$$

$LC + KC = LK = HI$ だから、

$$6\sqrt{r} + 4\sqrt{r} = 12$$

$$10\sqrt{r} = 12$$

$$\sqrt{r} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore r = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{36}{25}}$$

であり、これが求める値である。

