

中2数学B 2019年2学期 本問解答

§11 正多面体1

※ 欠席してしまった場合は、問 11.1 を（余裕があれば問 11.2, 問 11.3 も）自分で確認し、p.35 の宿題 H11.1, H11.2 に取り組んで提出してください。

問11.1

解1 まず、対称性から点 I と点 O が一致することを示しておこう。

A から面 BCD へ下ろした垂線の足を H とする。

$$AB = AC = AD \dots\dots\dots ①$$

だから、

$$\triangle AHB \equiv \triangle AHC \equiv \triangle AHD$$

(斜辺一辺相等)

と分かる。対応辺を考えて

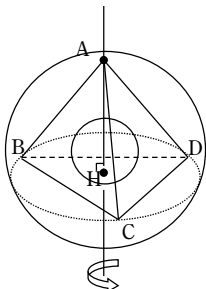
$$BH = CH = DH$$

だから、H は $\triangle BCD$ の外心である。

$$\triangle BCD \text{ は正三角形} \dots\dots\dots ②$$

なので（各辺の垂直二等分線が向い合う頂点を通ることから）、H は $\triangle BCD$ の重心とも一致する。

AH を軸として ABCD を 120° 回転させると①, ②より、ABCD は（回転前の）自分自身と重なる。よって、内接球 I と外接球 O も、この回転によってそれぞれ自分自身に重なり、その中心である点 I, 点 O が直線 AH 上にあることが分かる。



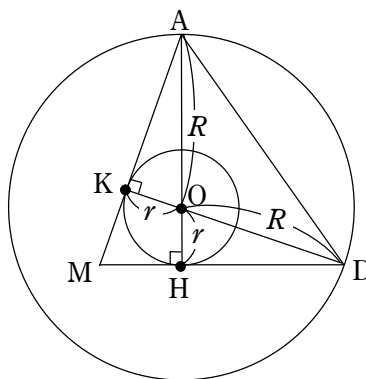
D から面 ABC へ下ろした垂線の足を K とすると、まったく同様に、点 I, 点 O が直線 DK 上にあることが分かる。ゆえに、点 I, 点 O はともに AH, DK の交点であり、一致する。

次に、BC の中点を M とし、A, M, D を通る

平面による断面を考える。H, K は、 $\triangle BCD$,

$\triangle ABC$ の重心になるから、それぞれ中線 DM, AM 上にある。したがって、AH, DK は（よって、点 I=点 O は）、この面 AMD 上にあり、断面図は次のようになる。

($h = AH$, $R = OA = OD$, $r = OH = OK$ である。)



$\triangle AOK$ と $\triangle AMH$ において、

$$\angle OAK = \angle MAH \quad (\text{共通})$$

$$\angle AKO = \angle AHM (= 90^\circ)$$

だから、

$$\triangle AOK \sim \triangle AMH \quad (\text{二角相等})$$

よって、対応辺の比を考え、

$$AO : OK = AM : MH \dots\dots\dots ③$$

ここで、AM, DM は合同な正三角形 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ の高さだから、

$$AM=DM$$

また、Hは△BCDの重心だから、

$$DM:HM=3:1$$

ゆえに、③より、

$$R:r=AO:OK$$

$$=DM:HM$$

$$=3:1 \dots\dots\dots ④$$

である。

$$h=AH=AO+OH=R+r$$

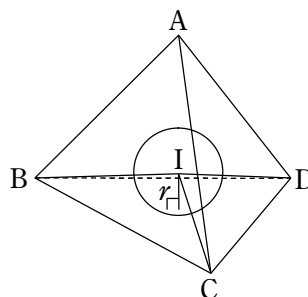
だから、④より、

$$r=\frac{1}{4}h, \quad R=\frac{3}{4}h$$

つまり、 r は h の $\frac{1}{4}$ 倍、 R は h の $\frac{3}{4}$ 倍である。

解2 断面図を考えずに、体積と表面積を利用した、次のような解決方法もある。点Iと点Oが一致することを利用せず、独立に考えることにする。

内接球の半径 r



点Iから△BCDに下ろした垂線の長さは内接球の半径 r となっており、四面体I-BCDの体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle BCD \times r$$

である。I-ABC, I-ACD, I-ADB, I-BCDは合同な四面体で体積は等しく、A-BCDをこれらの四面体に分割して考えると、A-BCDの体積は

$$4 \times \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times r \dots\dots\dots ①$$

と表せる。

一方、A-BCDの体積は、高さ h を用いて

$$\frac{1}{3} \times \triangle BCD \times h \dots\dots\dots ②$$

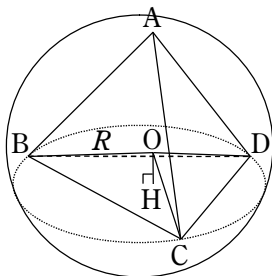
と表せるので、①、②より、

$$4 \times \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times r = \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times h$$

$$\therefore r = \frac{1}{4}h$$

で、 r は h の $\frac{1}{4}$ 倍である。

外接球の半径 R



解1で示したように、 $AB=AC=AD$ より、 A から面 BCD に下した垂線の足は $\triangle BCD$ の外心 H と一致する。四面体 $O-BCD$ は $OB=OC=OD$ の等稜四面体だから、まったく同様に、 O から面 BCD に下した垂線の足は $\triangle BCD$ の外心 H となっていることが分かる。したがって、 $O-BCD$ の面 BCD を底面としたときの高さは OH になり、 $O-BCD$ の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle BCD \times OH \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

である。

$O-ABC$, $O-ACD$, $O-ADB$, $O-BCD$ は合同な四面体で体積は等しく、 $A-BCD$ はこれらの四面体に分割できるので、 $O-BCD$ の体積は $A-BCD$ の体積②の $\frac{1}{4}$ である。よって、③より

$$\frac{1}{3} \times \triangle BCD \times OH = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times h$$

$$\therefore OH = \frac{1}{4}h$$

である。

最初に述べたことから、 A, O はともに外心 H を通る面 BCD の垂線上にある。したがって、

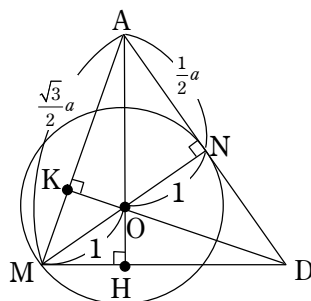
$$R = AO = AH - OH = h - \frac{1}{4}h = \frac{3}{4}h$$

で、 R は h の $\frac{3}{4}$ 倍である。

問11.2

頂点 A から面 BCD へ下ろした垂線の足を H 、頂点 D から面 ABC へ下ろした垂線の足を K 、辺 BC, AD の中点をそれぞれ M, N とする。

問 11.1 とまったく同様に、この問題の球の中心 O は、 AH, DK の交点であり、 A, M, D を通る平面による断面は次の図のようになる。



求める正四面体の1辺の長さを a とおく。 AM は正三角形 ABC の高さだから、

$$AM = \sqrt{3} BM = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

また、球の半径は1だから、

$$OM = ON = 1$$

さらに、球 O は AD に接しているので、

$$\angle ANO = 90^\circ$$

O は AH, DK の交点だから $\triangle AMD$ の垂心であり、よって、 M, O, N が一直線上にあることも分かる。したがって、 $\triangle AMN$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$AM^2 = AN^2 + MN^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 2^2$$

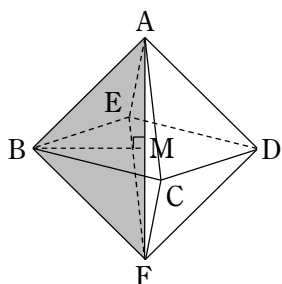
$$\frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + 4$$

$$\frac{1}{2}a^2 = 4$$

$$a^2 = 8$$

したがって、 $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} (> 0)$

問11.3



- (1) $\triangle ABF$ は $BA=BF$ の二等辺三角形だから、
B から AF への中線 BM は B から AF へ
の垂線と一致し、

$$BM \perp AF$$

これより、 BM は (よって B は)、 M を
通り AF に垂直な平面 α に含まれる。

まったく同様に、 C, D, E も α 上の点
であることが言えるので、 B, C, D, E は
同一平面 α 上に存在する。

- (2) まず、 B, C, D, E は同一平面上にあって、
四角形の頂点をなしていることに注意
する。

$$BC = CD = DE = EB$$

なので、

$$BCDE \text{ はひし形} \dots\dots\dots ①$$

である。

ここで、三辺相等で

$$\triangle ABF \equiv \triangle ACF \equiv \triangle ADF \equiv \triangle AEF$$

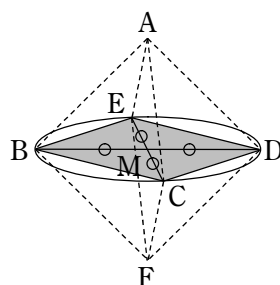
であるが、これら合同な二等辺三角形に
おいて、 B, C, D, E から AF への中線は等
しく、

$$BM = CM = DM = EM$$

したがって、 M を中心として B を通る円
を描けば、 B, C, D, E はこの円周上にあ
り、

$$BCDE \text{ は円に内接する} \dots\dots\dots ②$$

ことが分かる。



四角形 $BCDE$ において、

$$① \text{ より、} \angle B = \angle D \dots\dots\dots ③$$

(平行四辺形の向かい合う角は等しい)

$$② \text{ より、} \angle B + \angle D = 180^\circ \dots\dots\dots ④$$

(内接四角形の定理)

③, ④ より $\angle B = 90^\circ$ となるので、これと

① より、 $BCDE$ は一つの内角が 90° のひ
し形、つまり正方形である。

(3) A-BCDE-F の 1 辺の長さを 2 とする。

(2)より、BCDE は正方形で M はその対角線の交点だから、

$$MB = MC = MD = ME \dots\dots\dots ⑤$$

同様に、ACFE は正方形で M はその対角線の交点だから、

$$MA = MC = MF = ME \dots\dots\dots ⑥$$

⑤, ⑥より、M が正八面体 A-BCDE-F の外接球の中心であり、MA がその半径である。ACFE は 1 辺 2 の正方形だから、その対角線の長さは

$$AF = \sqrt{2} AC = 2\sqrt{2}$$

したがって、

$$R = MA = \frac{1}{2} AF = \boxed{\sqrt{2}}$$

次に、体積から内接球の半径 r を求めよう。内接球の中心を I とする。(問 11.1 の解 1 と同様の議論をすれば、I は M と一致することが示せるが、ここではそのことは使わずに問 11.1 の解 2 と同様に論じる。) 点 I から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の長さは r となっており、四面体 I-ABC の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times r$$

である。I-ABC, I-ACD, I-ADE, I-AEB, I-FBC, I-FCD, I-FDE, I-FEB は合同な四面体で体積は等しく、A-BCDE-F の体積 V は、これらの四面体に分割して考えることにより、

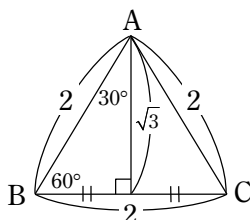
$$V = 8 \times \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times r$$

と表せる。ここで、 $\triangle ABC$ は 1 辺 2 の正三角形だから、その面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

(右図)である。

よって、



$$V = \frac{8}{3} \sqrt{3} r \dots\dots\dots ⑦$$

一方、(1)より、 $AM \perp$ 面 BCDE だから、A-BCDE-F を 2 つの合同な四角錐 A-BCDE, F-BCDE に分割して考えることにより、

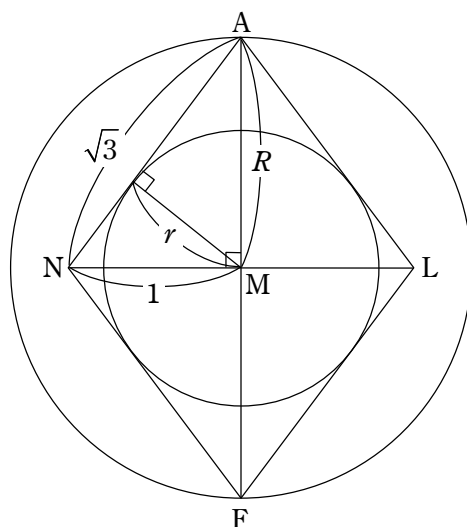
$$\begin{aligned} V &= 2 \times \frac{1}{3} \times (\text{ABCDの面積}) \times AM \\ &= \frac{2}{3} \times 2^2 \times \sqrt{2} = \frac{8}{3} \sqrt{2} \dots\dots\dots ⑧ \end{aligned}$$

⑦, ⑧より、

$$\frac{8}{3} \sqrt{3} r = \frac{8}{3} \sqrt{2}$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

※ BC の中点を N, DE の中点を L とする。面 ANFL による断面図は以下になる。(I と M は一致する。)



この図から、

$$R = \sqrt{AN^2 - MN^2} = \sqrt{3 - 1} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$r = MN \times \frac{AM}{AN} = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

と分かる。