

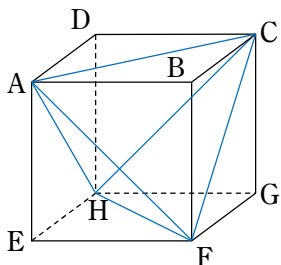
中2数学B 2019年度2学期 本問解答

§12 正多面体2

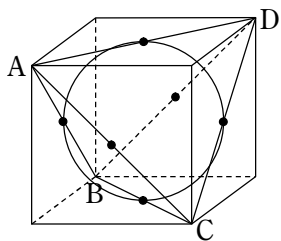
※ 欠席してしまった場合は、問 12.1, 問 12.2 を自分で確認してください。
さらに、問 12.3 やチャレンジ問題の中から興味のあるものに取り組んでみよう。

問12.1

- (1) 下図のように切断すれば、ACFH は、すべての面が正三角形なので、正四面体である。



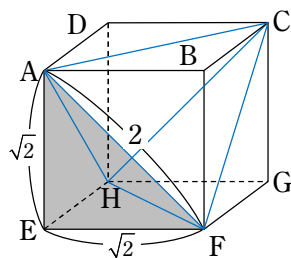
※ このことを活用した、問 11.2 の「うまい」別解がある。



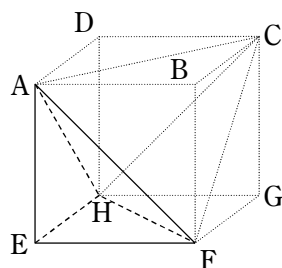
正四面体 ABCD を図のように立方体の中におくと、立方体に内接する球は、ちょうど問 11.2 の条件を満たす球となっている。よって、この球の半径が 1 であるとき、立方体の 1 辺の長さは 2 であり、正四面体 ABCD の 1 辺の長さは (立方体の面である正方形の対角線なので)

$$\boxed{2\sqrt{2}}$$

- (2) 立方体 ABCD-EFGH の面の対角線が、正四面体 ACFH の辺になるので、正四面体の辺の長さが 2 になるのは、立方体の 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ のときである。



正四面体 ACFH は、立方体 ABCD-EFGH から、AEFH と合同な 4 つの四面体を取り除いたものである。



取り除いている四面体の体積は

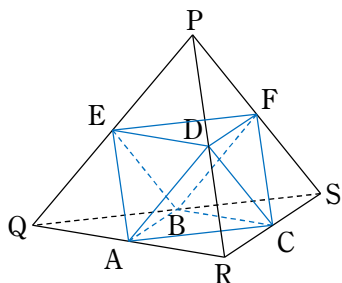
$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \right) \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

なので、正四面体 ACFH の体積は、

$$\left(\sqrt{2} \right)^3 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

問12.2

- (1) PQRS の各辺の中点を図のように A, B, C, D, E, F とし、八面体 ABCDEF を考える。



すると、この八面体の各辺の長さは、中点連結定理より、PQRS の各辺の長さの半分になっており、すべて等しい。したがって、ABCDEF はすべての面が合同な正三角形となっているような八面体、すなわち正八面体である。

- (2) (1)の正四面体 PQRS の1辺の長さを2とすると、正八面体 ABCDEF の1辺の長さは1となる。

PQRS の体積を a とおくと、これを $\frac{1}{2}$ 倍に相似縮小した、1辺の長さ1の正四面体の体積 V は、(底面が $\frac{1}{2}$ 倍の相似縮小

なので面積は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 倍であり、高さも

$\frac{1}{2}$ 倍なので)

$$V = \frac{a}{8}$$

となる。

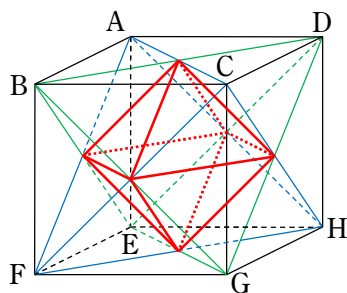
1辺の長さが1の正八面体 ABCDEF は、PQRS から、1辺の長さが1の正四面体 PDFE, QAEB, RACD, SBFC を除いたものなので、ABCDEF の体積 W は

$$W = a - 4 \times \frac{a}{8} = \frac{a}{2} \dots\dots\dots \star$$

となる。

$$\text{よって、} V:W = \frac{a}{8} : \frac{a}{2} = \boxed{1:4}$$

問12.3



共通部分は、ACFH の各辺の中点（立方体の各面の対角線の交点）をつないだ正八面体になる。問 12.2 の☆より、この正八面体の体積は、ACFH の体積の $\frac{1}{2}$ 倍である。

一方、正四面体 ACFH は、問 12.1 で見たように、立方体から、ABCF と合同な三角錐を 4 つ取り除いたものなので、体積は

$$1^3 - 4 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 \right) = \frac{1}{3}$$

よって、共通部分の体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$