

中2数学B 2019年度2学期 宿題解答

§7 面对称性と平面への垂線

H7.1

(1) 不等式

$$x^2 + 6x + 8 < 0 \dots\dots\dots ①$$

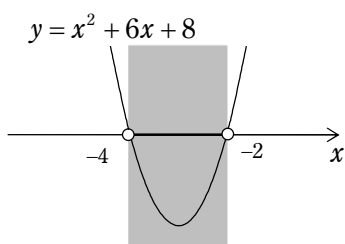
の解は、

$$y = x^2 + 6x + 8$$

のグラフで、 y 座標が負になっている部分の x 座標の範囲である。右辺を（平方完成ではなく）因数分解すると、

$$y = x^2 + 6x + 8 = (x+4)(x+2)$$

となるから、グラフの x 切片が $-2, -4$ と分かる。



よって、図より、①の解は、

$$\boxed{-4 < x < -2}$$

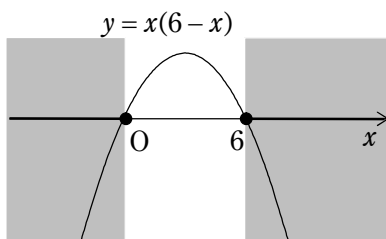
(2) 不等式

$$x(6-x) \leq 0 \dots\dots\dots ②$$

の解は、 $y = x(6-x)$ のグラフで、 y 座標が 0 以下になっている部分の x 座標の範囲である。

$$y = x(6-x) = -(x-0)(x-6)$$

のグラフは、 x 切片は $0, 6$ で、上に凸な放物線である。



よって、図より、②の解は、

$$\boxed{x \leq 0, 6 \leq x}$$

H7.2

BC の中点を M とする。

OB=OC より OM ⊥ BC,

AB=AC より AM ⊥ BC

だから、OM//AM (OM と AM は平行でない) にも注意して、

平面 OAM ⊥ BC ①

平面 OAM 内で O から AM に下ろした垂線の足を H とする:

OH ⊥ AM ②

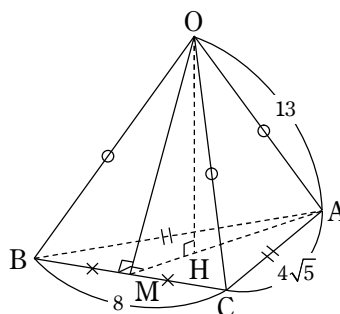
OH は平面 OAM 内にあるから、①より、

OH ⊥ BC ③

②, ③より、AM//BC にも注意して、

OH ⊥ 平面 ABC

であり、△ABC を底面と見ると、OH がこの四面体の高さとなる。

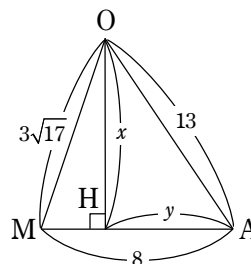


△OBM にピタゴラスの定理を用いて、

$$OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = \sqrt{13^2 - 4^2} = 3\sqrt{17}$$

△ABM にピタゴラスの定理を用いて、

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2} = 8$$



OH = x, AH = y とおく。

△OAH にピタゴラスの定理を用いて、
 $x^2 + y^2 = 13^2$ ④

△OMH にピタゴラスの定理を用いて、
 $x^2 + (8 - y)^2 = (3\sqrt{17})^2$ ⑤

④ - ⑤ より

$$y^2 - (8 - y)^2 = 13^2 - (3\sqrt{17})^2$$

$$y^2 - (64 - 16y + y^2) = 169 - 153$$

$$y^2 - 64 + 16y - y^2 = 16$$

$$16y = 80$$

$$\therefore y = 5$$

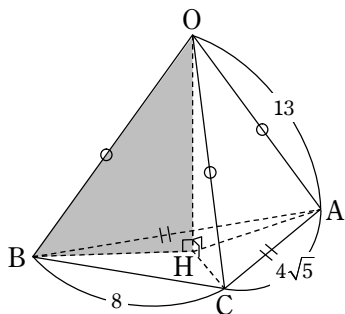
④に代入して

$$x^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \quad \therefore x = 12 (> 0)$$

よって、四面体 OABC の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times OH &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times BC \times AM \right) \times OH \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 8 \right) \times 12 \\ &= \boxed{128} \end{aligned}$$

別解



O から面 ABC に下した垂線の足を H とすると、

$$\angle OHA = \angle OHB = \angle OHC = 90^\circ$$

$$OA = OB = OC (= 13)$$

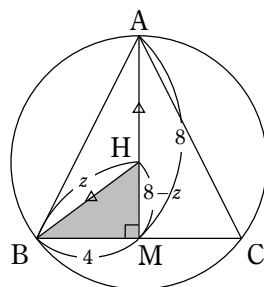
$$OH = OH = OH \quad (\text{共通})$$

なので、直角三角形の斜辺一辺相等で、

$$\triangle OHA \equiv \triangle OHB \equiv \triangle OHC$$

$$\therefore HA = HB = HC \quad (\text{対応辺})$$

が成り立ち、H は△ABC の外心である。



したがって、H は辺 BC の垂直二等分線上の点であって、 $HA = HB$ を満たす点に他ならない。辺 BC の中点を M とすると、△ABC は $AB = AC$ の二等辺三角形だから、中線 AM は A から BC への垂線と一致する。よって、直線 AM が辺 BC の垂直二等分線であり、H は AM 上の点であることが分かる。

△ABM でピタゴラスの定理を用いて、

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2} = 8$$

よって、 $HA = HB = z$ とおくと、

$$HM = AM - HA = 8 - z$$

であり、△BHM にピタゴラスの定理を用いて、

$$4^2 + (8 - z)^2 = z^2$$

これを解くと、

$$16 + 64 - 16z + z^2 = z^2 \quad 80 = 16z \quad \therefore z = 5$$

したがって、△OBH にピタゴラスの定理を用いて、

$$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

以上より、四面体 OABC の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times OH &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times BC \times AM \right) \times OH \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 8 \right) \times 12 \\ &= \boxed{128} \end{aligned}$$

H7.3

AB, CD の中点をそれぞれ M, N とおく。

△OAB は OA=OB の二等辺三角形だから、中線 OM は O から AB への垂線と一致し、

$$AB \perp OM \dots\dots\dots ①$$

ABCD は長方形だから、

$$AB \perp MN \dots\dots\dots ②$$

①, ②より、OM//MN にも注意して、

$$AB \perp \text{平面} OMN \dots\dots\dots ③$$

である。平面 OMN 内で O から MN に下ろした垂線の足を H とする：

$$MN \perp OH \dots\dots\dots ④$$

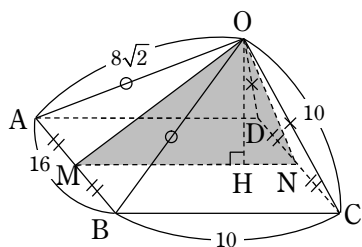
OH は平面 OMN 内にあるから、③より、

$$AB \perp OH \dots\dots\dots ⑤$$

④, ⑤より、MN//AB にも注意して、

$$\text{平面} ABCD \perp OH$$

であり、底面 ABCD に対し OH がこの四角錐の高さである。



△OAM にピタゴラスの定理を用いて、

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 - 8^2} = 8$$

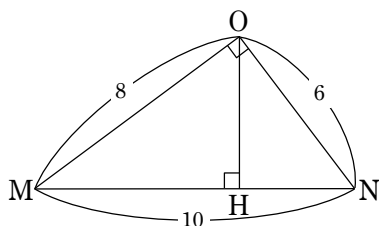
OC=OD より CD ⊥ ON だから、△OCN にピタゴラスの定理を用いて、

$$ON = \sqrt{OC^2 - CN^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

いま、

$$OM^2 + ON^2 = 8^2 + 6^2 = 100 = 10^2 = MN^2$$

が成り立っているので、ピタゴラスの定理の逆より、△OMN は ∠MON = 90° の直角三角形である。



△OMN の面積、あるいは△OMN の △HON に着目して、

$$MN \times OH = OM \times ON$$

$$10 \times OH = 8 \times 6$$

$$\therefore OH = \frac{24}{5}$$

よって、O-ABCD の体積は、

$$\frac{1}{3} \times \text{ABCD} \times OH = \frac{1}{3} \times (BC \times AB) \times OH$$

$$= \frac{1}{3} \times (10 \times 16) \times \frac{24}{5}$$

$$= \boxed{256}$$