

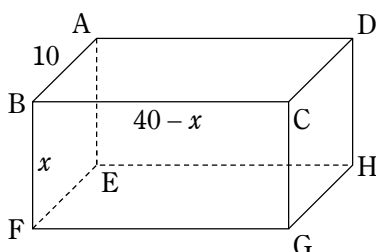
中2数学B 2019年度2学期 宿題解答

§8 立体の切断

H8.1

$BC + BF = 40$ なので、 $x = BF$ の取りうる範囲は

$0 < x < 40$ ①
である。



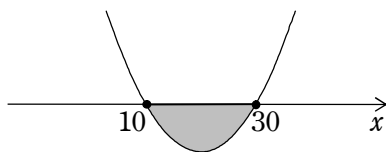
$$(1) \quad V = AB \times BC \times BF = 10 \times (40 - x) \times x \\ = \boxed{400x - 10x^2} \text{ (cm}^3\text{)} \quad \dots\dots\dots ②$$

$$(2) \quad V \text{ が } 3000 \text{ cm}^3 \text{ 以上になるのは} \\ 400x - 10x^2 \geq 3000 \\ 0 \geq 10x^2 - 400x + 3000 \\ \therefore x^2 - 40x + 300 \leq 0 \quad \dots\dots\dots ③$$

のときである。③の解は、2次関数

$$y = x^2 - 40x + 300 \\ = (x - 10)(x - 30)$$

のグラフ（ x 切片が 10, 30 で、下に凸な放物線）で、 y 座標が 0 以下となるような x 座標の範囲である。



それは、図より

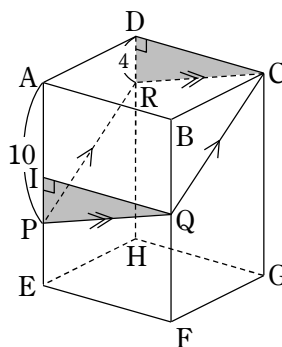
$$10 \leq x \leq 30$$

であるが、これは①を満たすので、求め

る x の範囲は $\boxed{10 \leq x \leq 30}$

H8.2

(1)



直方体の向かい合う面は平行なので、平面 PRC との交線は平行になる。よって、 $CR \parallel QP, CQ \parallel RP$ なので、

CRPQ は平行四辺形 ①
である。

Q から AE に下ろした垂線の足を I とすると、3つの内角が 90° になるので、

ABQI は長方形 ②

である。△DCR と △IQP において、

$$\angle CDR = \angle QIP = 90^\circ$$

$$CR = QP \quad \text{((1)より)}$$

$$CD = QI (= BA) \quad \text{((2)より)}$$

だから、斜辺一辺相等で

$$\triangle DCR \equiv \triangle IQP \quad \dots\dots\dots ③$$

となる。

よって、

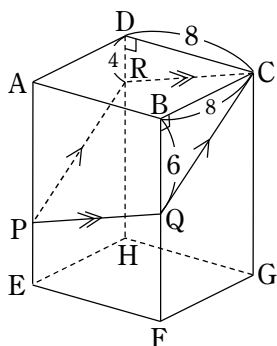
$$BQ = AI \quad \text{((2)より)}$$

$$= AP - IP$$

$$= AP - DR \quad \text{((3)より)}$$

$$= 10 - 4 = \boxed{6}$$

(2)



△CDR にピタゴラスの定理を用いて、

$$CR = \sqrt{CD^2 + DR^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

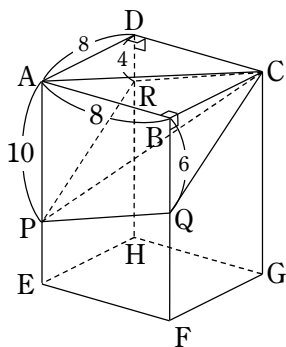
(1)より BQ=6 なので、△CBQ にピタゴラスの定理を用いて、

$$CQ = \sqrt{BC^2 + BQ^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

①より、PQCR は平行四辺形なので、その周の長さは、

$$\begin{aligned} 2 \times CR + 2 \times CQ &= 2 \times 4\sqrt{5} + 2 \times 10 \\ &= \boxed{8\sqrt{5} + 20} \end{aligned}$$

(3) 直方体全体から、六面体 ABCD-PQCR を除いたものとして計算しよう。



この六面体は、2つの四角錐 C-APRD と C-APQB に分割することができる。

直方体の辺 CD が面 AEHD と垂直なことから、C-APRD の APRD を底面としたときの高さは CD であり、CB が面 AEFB と垂直なことから、C-APQB の APQB を底面としたときの高さは CB になっている。

よって、

[C-APRD の体積]

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \times [\text{APRD の面積}] \times CD \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (AP + DR) \times AD \times CD \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (10 + 4) \times 8 \times 8 = \frac{448}{3} \end{aligned}$$

[C-APQB の体積]

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \times [\text{APQB の面積}] \times CB \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (AP + BQ) \times AB \times CB \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (10 + 6) \times 8 \times 8 = \frac{512}{3} \end{aligned}$$

よって、

[ABCD-PQCR の体積]

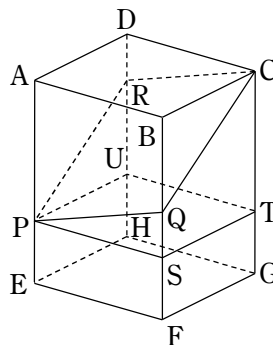
$$\begin{aligned} &= [\text{C-APRD の体積}] + [\text{C-APQB の体積}] \\ &= \frac{448}{3} + \frac{512}{3} = \frac{960}{3} = 320 \end{aligned}$$

求める六面体 PQCR-EFGH の体積は

[PQCR-EFGH の体積]

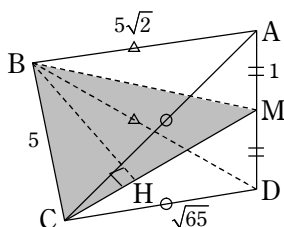
$$\begin{aligned} &= [\text{ABCD-EFGH の体積}] \\ &\quad - [\text{ABCD-PQCR の体積}] \\ &= 8 \times 8 \times 14 - 320 = \boxed{576} \end{aligned}$$

※ P を通り ABCD に平行な平面と BF, CG, DH との交点をそれぞれ S, T, U とおくと、



六面体 ABCD-PQCR と TUPS-CRPQ は鏡像な立体になっており、体積は等しくなる。このことを利用して体積を計算することもできる。

H8.3



AD の中点を M とすると、

BA=BD より $AD \perp BM$,

CA=CD より $AD \perp CM$

なので、 $BM \parallel CM$ にも注意して、

$AD \perp$ 面 BMC ①

である。B から CM へ下ろした垂線の足を H とすると、 $CM \perp BH$ かつ、①より、 $AD \perp BH$ だから、 $CM \parallel AD$ にも注意して、 $BH \perp$ 面 ACD である。よって、 $\triangle ACD$ を底面と見れば、高さは BH である。

ここで、 $\triangle BCM$ の三辺の長さは、まず、

$$BC = 5$$

CA=CD より、 $CM \perp AD$ だから、 $\triangle ACM$ にピタゴラスの定理を用いて、

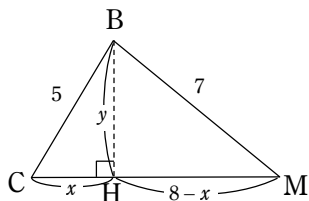
$$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\sqrt{65}\right)^2 - 1^2} = 8$$

BA=BD より、 $BM \perp AD$ だから、 $\triangle ABM$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$MB = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = 7$$

である。

$CH = x$, $BH = y$ とおく。



$\triangle BCH$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2 + y^2 = 5^2 \text{ ②}$$

$\triangle BMH$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$(8-x)^2 + y^2 = 7^2 \text{ ③}$$

②-③ より、

$$x^2 - (8-x)^2 = 25 - 49$$

$$x^2 - (64 - 16x + x^2) = -24$$

$$\cancel{x^2} + 16x - \cancel{x^2} = -24 + 64$$

$$x = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

なので、②より

$$y^2 = 25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{25 \times 3}{4}$$

$$\therefore BH = y = \frac{5\sqrt{3}}{2} (> 0)$$

ここで、

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \times AD \times CM = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$$

以上より、ABCD の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle ACD \times BH$$

$$= \frac{1}{3} \times 8 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{20\sqrt{3}}{3}}$$

※ $AD \perp BM$, $AD \perp CM$ より、 $AD \perp$ 面 BMC である。このことから、ABCD を 2 つの四面体 $ABCM$, $DBCM$ に分割し、 $\triangle BMC$ を底面、AM, DM を高さとして体積を計算することもできる。