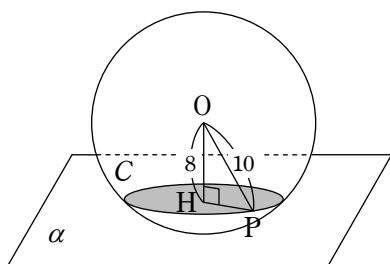


# 中2数学B 2019年度2学期 宿題解答

## §10 球

### H10.1



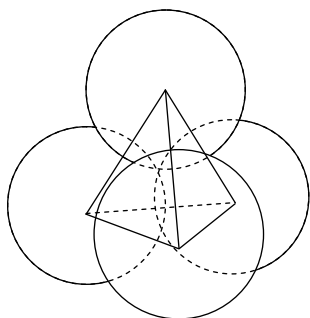
C 上に点 P を取ると、ピタゴラスの定理より、

$$HP = \sqrt{OP^2 - OH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

が成り立つので、C は H を中心とする半径 6 の円である。よって、切り口の面積は、

$$\pi \times 6^2 = \boxed{36\pi}$$

### H10.2



- (1) 隣り合う 2 球  $O, O'$  の中心をつなぐ線分  $OO'$  は、接点  $T$  を通るので、  
 $OO' = OT + TO' = 3 + 3 = 6$   
 である。したがって、4 つの球の中心をつないでできる立体は、すべての辺の長さが 6 の 正四面体 である。

- (2) 底面から中心をつないだ正四面体までの高さは 3 である。また、正四面体のてっぺんから上に乗っている球のてっぺんまでの高さも 3 である。あとは、1 辺の長さ 6 の正四面体の高さがわかればよい。

この正四面体を  $ABCD$  とし、 $BC$  の中点を  $M$ 、 $A$  から  $DM$  に下ろした垂線の足を  $H$  とおく。よって、

$$AH \perp DM \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また、

$$AB = AC, BM = CM \text{ より } AM \perp BC,$$

$$DB = DC, BM = CM \text{ より } DM \perp BC$$

で、 $AM \parallel DM$  だから、

$$\text{面 } AMD \perp BC$$

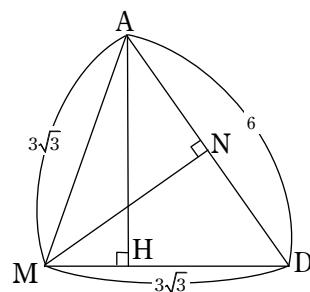
よって、

$$AH \perp BC \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$DM \parallel BC$  だから、①、②より、

$$AH \perp \text{面 } BCD$$

であり、 $AH$  がこの四面体の高さである。



$\triangle AMD$  の面積に着目して  $AH$  を求めよう。 $AM, DM$  は合同な正三角形  $\triangle ABC, \triangle DBC$  の中線だから、

$$AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3}$$

$AD$  の中点を  $N$  とすると、 $AM = DM$  と合わせて、 $MN \perp AD$  だから、 $\triangle AMN$  にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned}
 MN &= \sqrt{AM^2 - AN^2} \\
 &= \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

したがって、△AMDの面積に着目して、

$$(2\triangle AMD) = AD \times MN = MD \times AH$$

$$6 \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{3} \times AH$$

$$\therefore AH = \frac{6 \times 3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

以上より、底面から上に乗っている球のてっぺんまでの高さは

$$3 \times 2 + 2\sqrt{6} = \boxed{6 + 2\sqrt{6}}$$

※ ABCDの高さを求める部分は、対称性を利用して次のようにしてもよい。

Aから面BCDへ下ろした垂線の足をHとすると、

$$\triangle AHB \equiv \triangle AHC \equiv \triangle AHD$$

(斜辺一辺相等)

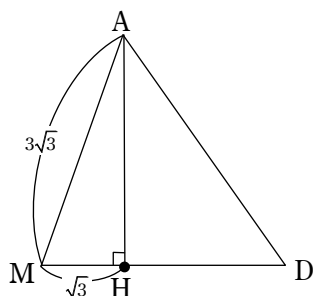
となる。対応辺を考えて

$$BH = CH = DH$$

だから、Hは△BCDの外心である。

△BCDは正三角形なので(各辺の垂直二等分線が向い合う頂点を通ることから)、Hは△BCDの重心とも一致する。

BCの中点をMとし、面AMDによる断面図を考える。



AM, DMは合同な正三角形△ABC, △DBCの中線だから、

$$AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3}$$

Hは△DBCの重心だから、

$$MH = \frac{1}{3} DM = \sqrt{3}$$

したがって、△AMHにピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned}
 AH &= \sqrt{AM^2 - MH^2} \\
 &= \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{27 - 3} \\
 &= 2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$