中2数学C 2019年度2学期 本問解答
§9 直線と平面のなす角・二面角

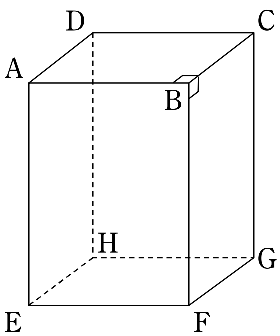
※ 欠席してしまった場合は、問 9.1～問 9.3 を自分で確認し、p.26～p.27 の宿題 H9.1～H9.3 に取り組んで提出してください。

問9.1

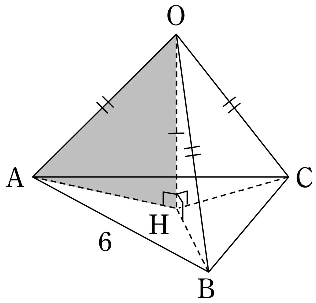
(1) 面 ABCD と面 BFGC のなす角は

$AB \perp BC$, $FB \perp BC$

より、$\angle ABF = 90°$ である。他の隣り合う 2 面についても同様で、そのなす角は $\boxed{90°}$ である。



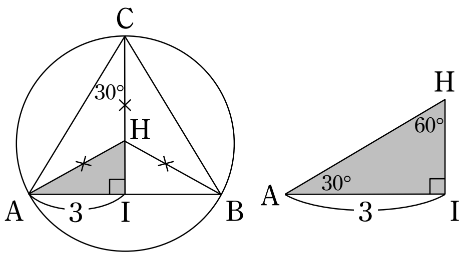
(2) O から面 ABC に下した垂線の足を H とすると、$\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$（斜辺一辺相等）なので、$AH = BH = CH$ であり、H は△ABC の外心となる。



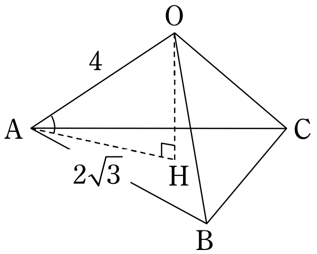
CH と AB の交点を I とすると、△AHI は $30°, 60°, 90°$ の三角定規の形であり、

$$IH = \frac{1}{\sqrt{3}}AI = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3 = \sqrt{3}$$

$$AH = \frac{2}{\sqrt{3}}AI = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 3 = 2\sqrt{3}$$



(i) 辺 OA と面 ABC のなす角は、$\angle$OAH である。

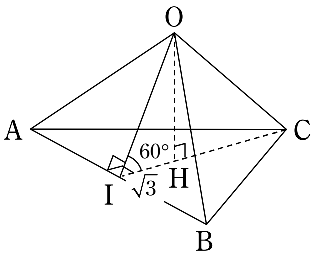


$$\mathrm{OA} : \mathrm{AH} = 4 : 2\sqrt{3} = 2 : \sqrt{3},$$
$$\angle \mathrm{OHA} = 90^\circ$$

より、$\triangle$OAH は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角定規の形であり、$\angle \mathrm{OAH} = \boxed{30^\circ}$

(ii) $$\mathrm{OI} \perp \mathrm{AB}, \mathrm{CI} \perp \mathrm{AB}$$

なので、面 OAB と面 ABC のなす角は $\angle$OIC である。



$\triangle$OIH は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角定規の形であり、

$$\mathrm{OI} = 2 \times \mathrm{HI} = 2\sqrt{3}$$

よって、$\triangle$OAI にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{OA} = \sqrt{\mathrm{OI}^2 + \mathrm{AI}^2}$$
$$= \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{21}}$$

問9.2

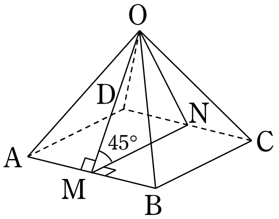
AB の中点を M、DC の中点を N とすると、
△OAB において

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB},\ \mathrm{AM}=\mathrm{BM}$ より、 $\mathrm{OM}\perp\mathrm{AB}$

正方形 ABCD において

$\mathrm{AM}=\mathrm{BM},\ \mathrm{DN}=\mathrm{CN}$ より、 $\mathrm{MN}\perp\mathrm{AB}$

したがって、面 OAB と面 ABCD のなす角は∠OMN である。



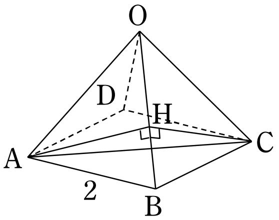
△OAB≡△OCB（三辺相等）なので、A から OB に下した垂線の足と、C から OB に下した垂線の足が一致することが分かる。この点を H とおくと、

$\mathrm{AH}\perp\mathrm{OB},\ \mathrm{CH}\perp\mathrm{OB}$

なので、面 OAB と面 OBC のなす角は∠AHC であり、また、

$\mathrm{AH}=\mathrm{CH}$

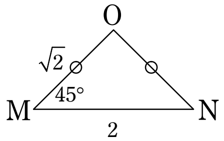
であることも分かる。

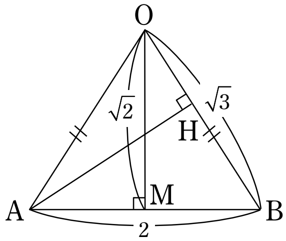


以下、二等辺三角形 AHC に注目して、∠AHC を求めよう。

$\mathrm{OM}=\mathrm{ON},\ \angle\mathrm{OMN}=45^\circ$ より△OMN は直角二等辺三角形で、

$$\mathrm{OM}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{MN}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$





よって、△OBM にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned}\mathrm{OB}&=\sqrt{\mathrm{OM}^2+\mathrm{BM}^2}\\&=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3}\end{aligned}$$

△OAB の面積に注目して、

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{OM}=\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\times\mathrm{OB}\times\mathrm{AH}$$

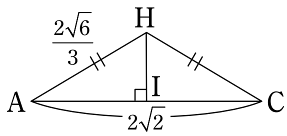
$$2\times\sqrt{2}=\sqrt{3}\times\mathrm{AH}$$

$$\mathrm{AH}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

AC は、正方形 ABCD の対角線なので

$$\mathrm{AC}=\sqrt{2}\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$$

ゆえに、△AHC は下図のようになっている。



H から AC に下した垂線の足を I とすると、I は AC の中点であり、

$$\begin{aligned}\mathrm{AH}:\mathrm{AI}&=\frac{2\sqrt{6}}{3}:\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{3}:\sqrt{2}\\&=2\sqrt{3}:3=2:\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\angle\mathrm{AIH}=90^\circ$$

よって、△AHI は $30^\circ,60^\circ,90^\circ$ の三角定規の形で、 $\angle\mathrm{AHI}=60^\circ$ である。

以上より、

$$\angle\mathrm{AHC}=2\times\angle\mathrm{AHI}=2\times60^\circ=\boxed{120^\circ}$$

問9.3

AH⊥面 HBC だから、AH を含む平面はすべて面 HBC と垂直である。直感的には、その中から、面 ABC と面 HBC の交線 BC と垂直なものが選べるはずである。その平面と BC との交点を I とすると、∠AIH が面 ABC と面 HBC のなす角である。

A から BC に下ろした垂線の足を I とする:

$$\mathrm{AI} \perp \mathrm{BC} \quad \cdots\cdots ①$$

$\mathrm{AH} \perp \mathrm{BH},\ \mathrm{AH} \perp \mathrm{CH},\ \mathrm{BH} \nparallel \mathrm{CH}$ より、

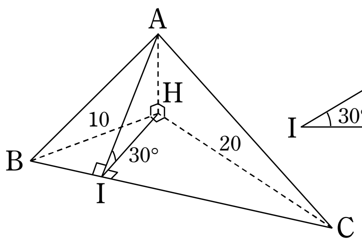
$\mathrm{AH} \perp$ 面HBC だから、

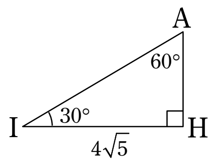
$$\mathrm{AH} \perp \mathrm{BC} \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②より、BC⊥面 AHI だから、

$$\mathrm{HI} \perp \mathrm{BC} \quad \cdots\cdots ③$$

①, ③より、面 ABC と面 HBC のなす角は ∠AIH である。





△AIH は

$$\mathrm{AH} \perp \mathrm{HI},\ \angle \mathrm{AIH} = 30^\circ$$

より、30°,60°,90° の三角定規の形なので、

$$\mathrm{AI} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{HI} \quad \cdots\cdots ④$$

HI を求めれば AI がわかり、△ABC の面積も求まる。△HBC にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{BC} = \sqrt{\mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^2}$$

$$= \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5}$$

△HBC の面積に注目して、

$$\cancel{\frac{1}{2}} \times \mathrm{BH} \times \mathrm{CH} = \cancel{\frac{1}{2}} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{HI}$$

$$10 \times 20 = 10\sqrt{5} \times \mathrm{HI}$$

$$\mathrm{HI} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

よって、④より

$$\mathrm{AI} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{20}{\sqrt{5}}$$

で、

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AI}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{200}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{200\sqrt{3}}{3}}$$