中2数学C 2019年度2学期 宿題解答
§9 直線と平面のなす角・二面角

H9.1

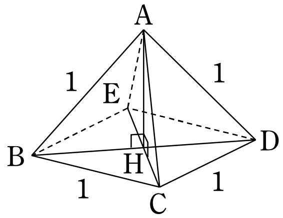
(1) 底面 BCDE の対角線の交点を H とすると、

$AB=AD, BH=DH$ より、 $AH\perp BD$

$AC=AE, CH=EH$ より、 $AH\perp CE$

なので、$BD \nparallel CE$ にも注意して

$AH\perp$ 平面BCDE である。よって、直線 AB と面 BCDE のなす角は、$\angle ABH$ である。



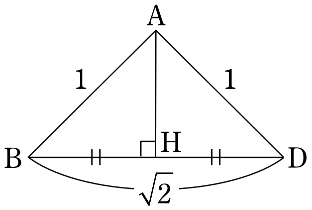
$\triangle ABD$ は、

$AB=AD=1, BD=\sqrt{2}\ BC=\sqrt{2}$

より、

$\angle ABH=\angle ABD=\boxed{45^\circ}$

の直角二等辺三角形である。



(2) BC の中点 M、ED の中点を N とする。

$\triangle ABC$ において、

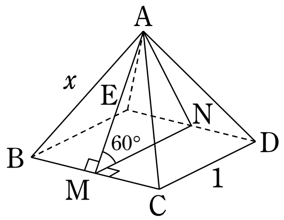
$AB=AC, BM=CM$ より、 $AM\perp BC$

正方形 BCDE において、

$BM=CM, EN=DN$ より、 $MN\perp BC$

なので、面 ABC と面 BCDE のなす角は $\angle AMN$ であり、

$\angle AMN=60^\circ$



$\triangle ABM\equiv\triangle AEN$ (斜辺一辺相等) より、$AM=AN$ だから，$\angle AMN=60^\circ$ と合わせて、$\triangle AMN$ は正三角形であり、

$AM=MN=1$

よって、$\triangle ABM$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$x=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

H9.2

AH⊥面 HBC だから、AH を含む平面はすべて面 HBC と垂直である。直感的には、その中から、面 ABC と面 HBC の交線 BC と垂直なものが選べるはずである。その平面と BC との交点を I とすると、∠AIH が面 ABC と面 HBC のなす角である。

A から BC に下ろした垂線の足を I とする:

AI⊥BC ……………………………………… ①

$AH\perp BH$, $AH\perp CH$, $BH \nparallel CH$ より、

$AH\perp$ 面HBC だから、

AH⊥BC ……………………………………… ②

①, ②より、BC⊥面 AHI だから、

HI⊥BC ……………………………………… ③

①, ③より、面 ABC と面 HBC のなす角は∠AIH である。これが 45° なので、 $AH\perp HI$ と合わせて、

△AIH は直角二等辺三角形 ……………④

と分かる。ここで、BH=CH, ∠BHC=90° より、△BHC は直角二等辺三角形だから、③より、△BHI も直角二等辺三角形になる。

したがって、

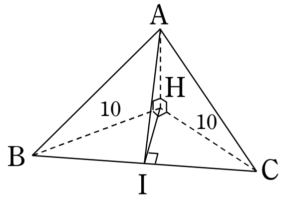
$$\mathrm{HI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \mathrm{BH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10 = 5\sqrt{2}$$

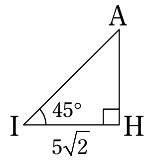
これと、④より、

$$\mathrm{AH} = \mathrm{HI} = 5\sqrt{2}$$

$$\mathrm{AI} = \sqrt{2}\ \mathrm{HI} = \sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 10$$

である。





以上より，S, V は以下のように求まる。

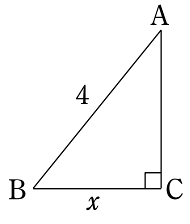
(1) $S = \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AI} = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times 10 = \boxed{50\sqrt{2}}$

(2) $V = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{BCH} \times \mathrm{AH}$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \mathrm{BH} \times \mathrm{CH}\right) \times \mathrm{AH}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 10\right) \times 5\sqrt{2} = \boxed{\frac{250\sqrt{2}}{3}}$$

H9.3



(1) $S = \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AC}$ なので、

$$S^2 = \left(\frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AC}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \mathrm{BC}^2 \times \mathrm{AC}^2$$

ピタゴラスの定理より、

$$S^2 = \frac{1}{4} \times \mathrm{BC}^2 \times (\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2)$$

$$= \frac{1}{4} \times x^2 \times (4^2 - x^2)$$

$$= \boxed{\frac{1}{4} x^2 (16 - x^2)}$$

なお、$0 < \mathrm{BC} < \mathrm{AB}$ より、x の範囲は

$0 < x < 4$ ……………………………… ①

である。

(2) S が $\sqrt{7}$ より大きくなるのは、S^2 が 7 より大きくなるときなので、(1)より

$$\frac{1}{4} x^2 (16 - x^2) > 7$$

$$16x^2 - x^4 > 28$$

$\therefore x^4 - 16x^2 + 28 < 0$ ……………………… ②

となるときである。

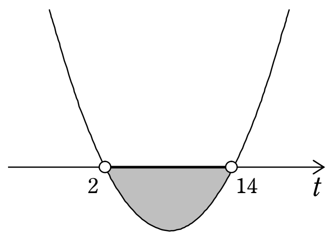
$t = x^2$ とおくと、②の左辺は

$$t^2 - 16t + 28$$

と表せる。これが負となる t の範囲は、

$$y = (t-2)(t-14)$$

のグラフ（t 切片が $2, 14$ で下に凸な放物線）で、y 座標が負となるような t 座標の範囲で、図より、



$$2 < t < 14$$

である。$t = x^2$ を用いて書き直すと、

$$2 < x^2 < 14$$

となり、これをみたす正の数 x の範囲は

$$\sqrt{2} < x < \sqrt{14}$$

である。これは①の範囲に含まれているので、求める x の範囲は $\boxed{\sqrt{2} < x < \sqrt{14}}$

である。