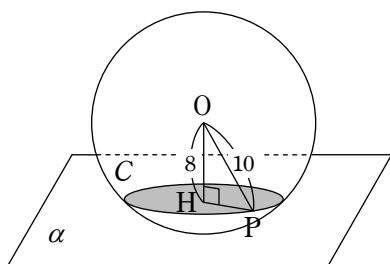


中2数学C 2019年度2学期 宿題解答

§10 球

H10.1



C 上に点 P を取ると、ピタゴラスの定理より、

$$HP = \sqrt{OP^2 - OH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

が成り立つので、C は H を中心とする半径 6 の円である。よって、切り口の面積は、

$$\pi \times 6^2 = \boxed{36\pi}$$

H10.2

BC, DE の中点をそれぞれ M, N とおく。

AB=AC, BM=CM より $AM \perp BC$,

BCDE は正方形だから $MN \perp BC$

したがって、 $AM \parallel MN$ にも注意して

面 $AMN \perp BC$ ①

A から MN に下ろした垂線の足を H とすると、

$AH \perp MN$ ②

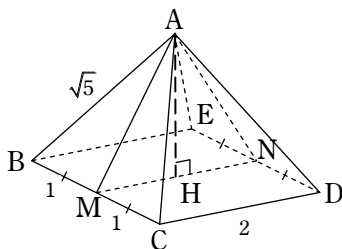
また、①より

$AH \perp BC$ ③

$MN \parallel BC$ だから、②, ③より

$AH \perp$ 面 BCDE ④

である。



(1) A-BCDE の体積

BMNE は長方形なので $MN = BE = 2$

$\triangle ABM$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$$

$$(BM = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2} = 1)$$

$\triangle ABC \equiv \triangle ADE$ (三辺相等) なので、中線の長さも等しく、

$$AM = AN = 2$$

$\triangle AMN$ は 1 辺 2 の正三角形なので、

$\triangle AMH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角定規の形であり、

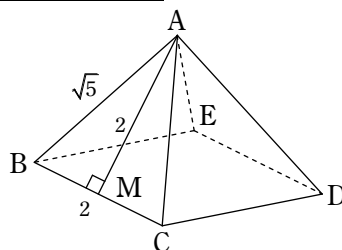
$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AM = \sqrt{3}$$

よって、A-BCDE の体積は、

$$\frac{1}{3} \times [\text{BCDE の面積}] \times AH$$

$$= \frac{1}{3} \times 2^2 \times \sqrt{3} = \boxed{\frac{4}{3}\sqrt{3}}$$

A-BCDE の表面積



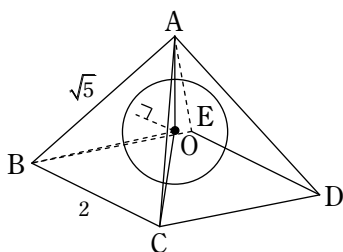
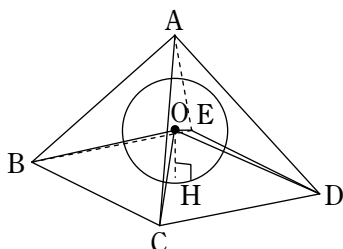
BCDE の面積は、 $2^2 = 4$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AM = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

三角形の面はすべて合同で同じ面積なので、A-BCDE の表面積は、

$$4 + 4 \times 2 = \boxed{12}$$

- (2) 球の中心 O と A - $BCDE$ の各面との接点をつなぐ半径は、各々の面と垂直になるので、 A - $BCDE$ の各面を底面として、 O を頂点とする錐を考えると、これらの錐の高さは球 O の半径となる。



そこで、球 O の半径を r とおくと、

$$[O\text{-}BCDE\text{の体積}] = \frac{1}{3} \times [BCDE\text{の面積}] \times r$$

$$[O\text{-}ABC\text{の体積}] = \frac{1}{3} \times [ABC\text{の面積}] \times r$$

⋮

$$[O\text{-}DEA\text{の体積}] = \frac{1}{3} \times [DEA\text{の面積}] \times r$$

で、これらを辺々加えることにより、

$$[A\text{-}BCDE\text{の体積}]$$

$$= \frac{1}{3} \times [A\text{-}BCDE\text{の表面積}] \times r$$

となることが分かる。

ここに (1)の結果を代入して、

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \times 12 \times r$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

別解 面 AMN による断面図を考える。

AH を軸として A - $BCDE$ を 90° 回転させると

$$AB=AC=AD=AE,$$

$ABCD$ は正方形

だから、 A - $BCDE$ は (回転前の) 自分自身と重なる。よって、内接球も、この回転によって自分自身に重なり、その中心である点 O が直線 AH 上にあることが分かる。

O から AM に下ろした垂線の足を K とすると、

$$OK \perp AM \cdots \cdots \cdots \textcircled{5}$$

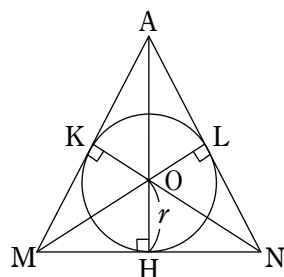
①より、

$$OK \perp BC \cdots \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$AM \parallel BC$ だから、⑤、⑥より

$$OK \perp \text{面 } ABC$$

同様にして、 O から AN に下した垂線の足を L とすると、これが O から面 ADE に下した垂線の足と一致することが分かる。



したがって、内接球と面 $BCDE$, 面 ABC , 面 ADE との接点は H, K, L であり、内接球の断面は、 $\triangle AMN$ の内接円である。 $\triangle AMN$ は正三角形だから、内心 O は重心と一致し、

$$OH = \frac{1}{3} AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。これが求める内接球の半径である。