

中2数学C 2019年度2学期 宿題解答

§11 正多面体1

H11.1

A から面 BCD へ下ろした垂線の足を H とする。

$$AB = AC = AD \dots\dots\dots ①$$

だから、

$$\triangle AHB \equiv \triangle AHC \equiv \triangle AHD$$

(斜辺一辺相等)

と分かる。対応辺を考えて

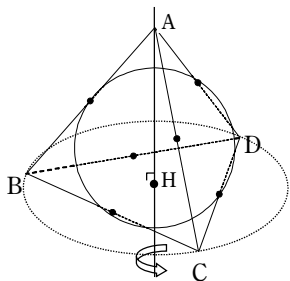
$$BH = CH = DH$$

だから、H は $\triangle BCD$ の外心である。

$$\triangle BCD \text{ は正三角形} \dots\dots\dots ②$$

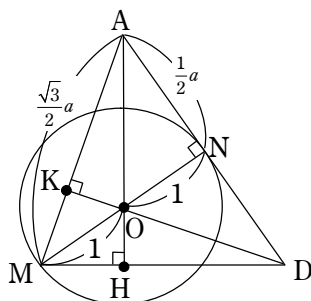
なので (各辺の垂直二等分線が向い合う頂点を通ることから)、H は $\triangle BCD$ の重心とも一致する。

AH を軸として ABCD を 120° 回転させると ①, ②より、ABCD は (回転前の) 自分自身と重なる。よって、球 O も、この回転によってそれぞれ自分自身に重なり、その中心である点 O が直線 AH 上にあることが分かる。



D から面 ABC へ下ろした垂線の足を K とすると、まったく同様に、点 O が直線 DK 上にあることが分かる。ゆえに、点 O は AH, DK の交点である。

次に、BC の中点を M とし、A, M, D を通る平面による断面を考える。H, K は、 $\triangle BCD$, $\triangle ABC$ の重心になるから、それぞれ中線 DM, AM 上にある。したがって、AH, DK は (よって点 O は)、この面 AMD 上にあり、断面図は次のようになる。(N は AD の中点である。)



求める正四面体の 1 辺の長さを a とおく。AM は正三角形 ABC の高さだから、

$$AM = \sqrt{3} BM = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

また、球の半径は 1 だから、

$$OM = ON = 1$$

さらに、球 O は AD に接しているので、

$$\angle ANO = 90^\circ$$

O は AH, DK の交点だから $\triangle AMD$ の垂心であり、よって、M, O, N が一直線上にあることも分かる。したがって、 $\triangle AMN$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$AM^2 = AN^2 + MN^2$$

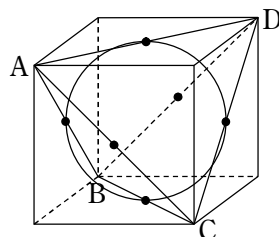
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 = \left(\frac{1}{2} a \right)^2 + 2^2$$

$$\frac{3}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 + 4$$

$$a^2 = 8$$

したがって、 $a = \boxed{2\sqrt{2}} (> 0)$

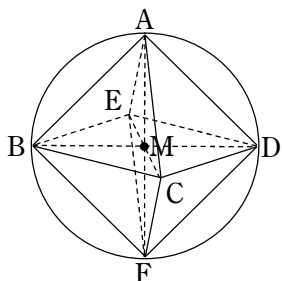
別解 問 11.3 の結果を利用した、次のような「うまい」別解もある。



正四面体 $ABCD$ を図のように立方体の中におくと、立方体に内接する球は、ちょうど本問の条件を満たす球となっている。よって、この球の半径が 1 であるとき、立方体の 1 辺の長さは 2 であり、正四面体 $ABCD$ の 1 辺の長さは（立方体の面である正方形の対角線なので） $\boxed{2\sqrt{2}}$

H11.2

$A-BCDE-F$ を 1 辺 2 の正八面体とし、 AF の中点を M とする。



問 11.2 より、 $BCDE$ は正方形で M はその対角線の交点だから、

$$MB = MC = MD = ME \dots\dots\dots ①$$

同様に、 $ACFE$ は正方形で M はその対角線の交点だから、

$$MA = MC = MF = ME \dots\dots\dots ②$$

①, ②より、 M が正八面体 $A-BCDE-F$ の外接球の中心であり、 MA がその半径である。 $ACFE$ は 1 辺 2 の正方形だから、その対角線の長さは

$$AF = \sqrt{2} AC = 2\sqrt{2}$$

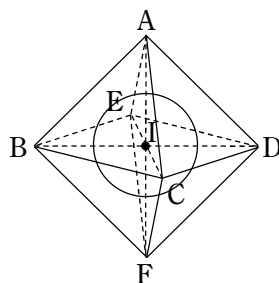
したがって、

$$R = MA = \frac{1}{2} AF = \boxed{\sqrt{2}}$$

次に、体積から内接球の半径 r を求めよう。内接球の中心を I とする。（H11.1 と同様の議論をすれば、 I は M と一致することが示せるが、ここではそのことは使わずに論じる。）点 I から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の長さは r となっており、四面体 $I-ABC$ の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times r$$

である。



$I-ABC$, $I-ACD$, $I-ADE$, $I-AEB$, $I-FBC$, $I-FCD$, $I-FDE$, $I-FEB$ は合同な四面体で体積は等しく、 $A-BCDE-F$ の体積 V は、これらの四面体に分割して考えることにより、

$$V = 8 \times \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times r$$

と表せる。ここで、 $\triangle ABC$ は 1 辺 2 の正三角形だから、その面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

（右下図）である。

よって、

$$V = \frac{8}{3} \sqrt{3} r \dots\dots\dots ③$$

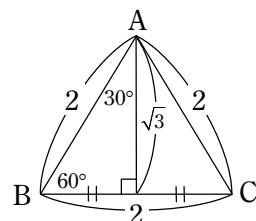
一方、(1)より、

$AM \perp$ 面 $BCDE$ だから、

$A-BCDE-F$ を 2 つの合同な四角錐 $A-BCDE$,

$F-BCDE$ に分割して考

えることにより、



$$V = 2 \times \frac{1}{3} \times (ABCD \text{ の面積}) \times AM$$

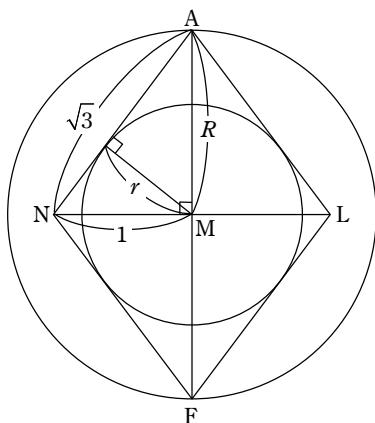
$$= \frac{2}{3} \times 2^2 \times \sqrt{2} = \frac{8}{3} \sqrt{2} \dots\dots\dots ④$$

③, ④より、

$$\frac{8}{3} \sqrt{3} r = \frac{8}{3} \sqrt{2}$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

※ BC の中点を N, DE の中点を L とする。
面 ANFL による断面図は以下のような
る。(I は M と一致する。)



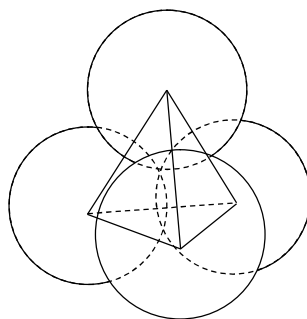
この図から、

$$R = \sqrt{AN^2 - MN^2} = \sqrt{3 - 1} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$r = MN \times \frac{AM}{AN} = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

と分かる。

H11.3



- (1) 隣り合う 2 球 O, O' の中心をつなぐ線分 OO' は、接点 T を通るので、
 $OO' = OT + TO' = 3 + 3 = 6$
 である。したがって、4 つの球の中心をつないでできる立体は、すべての辺の長さが 6 の **正四面体** である。
- (2) 底面から中心をつないだ正四面体までの高さは 3 である。また、正四面体のてっぺんから上に乗っている球のてっぺんまでの高さも 3 である。あとは、1 辺の長さ 6 の正四面体の高さがわかればよい。

この正四面体を $ABCD$ とし、 BC の中点を M 、 A から DM に下ろした垂線の足を H とおく。よって、

$$AH \perp DM \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また、

$$AB = AC, BM = CM \text{ より } AM \perp BC,$$

$$DB = DC, BM = CM \text{ より } DM \perp BC$$

で、 AM, DM は平行でないから、

$$\text{面 } AMD \perp BC$$

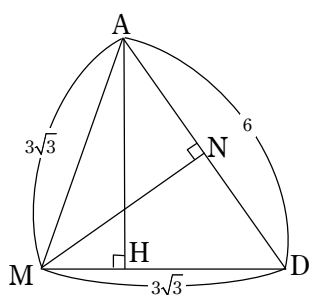
よって、

$$AH \perp BC \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

DM, BC は平行でないから、①, ②より、

$$AH \perp \text{面 } BCD$$

であり、 AH がこの四面体の高さである。



△AMD の面積に着目して AH を求めよう。AM, DM は合同な正三角形△ABC, △DBC の中線だから、

$$AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 3\sqrt{3}$$

AD の中点を N とすると、AM = DM と合わせて、MN ⊥ AD だから、△AMN にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{AM^2 - AN^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

したがって、△AMD の面積に着目して、

$$(2\triangle AMD) = AD \times MN = MD \times AH$$

$$6 \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{3} \times AH$$

$$\therefore AH = \frac{6 \times \cancel{3} \sqrt{2}}{\cancel{3} \sqrt{3}} = \frac{6 \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

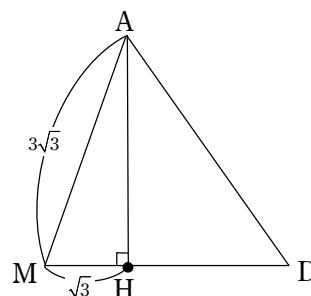
以上より、底面から上に乗っている球のてっぺんまでの高さは

$$3 \times 2 + 2\sqrt{6} = \boxed{6 + 2\sqrt{6}}$$

※ 正四面体 ABCD の高さを求める部分は、対称性を利用して次のようにしてもよい。

A から面 BCD へ下ろした垂線の足を H とすると H11.1 と同様に、H は正三角形△BCD の外心かつ重心である。

BC の中点を M とし、面 AMD による断面図を考える。



AM, DM は合同な正三角形△ABC, △DBC の中線だから、

$$AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 3\sqrt{3}$$

H は△DBC の重心だから、

$$MH = \frac{1}{3} DM = \sqrt{3}$$

したがって、△AMH にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AM^2 - MH^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}^2} \\ &= \sqrt{27 - 3} \\ &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$