

中2数学B 2019年度春期講習 本問解答

§3 分母の有理化

※ 欠席してしまった場合は、問 3.1～問 3.5 を自分で確認し、p.22 の宿題 H3.1～H3.4 に取り組んで提出してください。

問3.1

- (1) 面積 a の正方形 ABCD と面積 b の正方形 A'B'C'D'

を考える。面積比が $a:b=1:\frac{b}{a}$ なので、

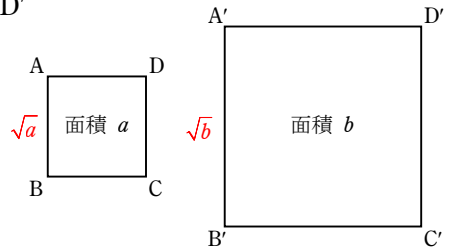
相似比は $\sqrt{1}:\sqrt{\frac{b}{a}}=1:\sqrt{\frac{b}{a}}$ となる。

したがって、 $A'B'=\sqrt{\frac{b}{a}}\times AB$ で、

$AB=\sqrt{a}$, $A'B'=\sqrt{b}$ なので、

$$\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{b} \quad \therefore \sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

が成り立つことが分かった。



- (2) $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{3.162277660\dots} = 1 \div 3.162277660\dots$ の計算はしたくないだろう。

(仮に電卓を使ったとしても、小数点以下 9 位に誤差が入ってくる可能性もある。)

そこで $\frac{1}{\sqrt{10}}$ を書き換えて、分母にあるルートをなくすことを考えよう。

$\frac{1}{\sqrt{a}}$ 倍の相似変換を 2 回繰り返すと

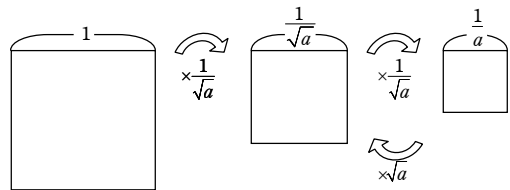
$\frac{1}{a}$ 倍の相似変換になり、さらに

続けて $\sqrt{a}$ 倍の相似変換をすれば、

$$\frac{1}{a} \times \sqrt{a} = \frac{\sqrt{a}}{a} \text{ 倍の相似変換をしたことになる。}$$

$\frac{1}{\sqrt{a}}$ 倍の相似変換の逆の変換が $\sqrt{a}$ 倍の相似変換であることを考えると、結局、

全体としては単なる $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 倍の相似変換をしたことになる(上の図)。



したがって、 $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ が成り立つことがわかる。これは、計算上は $\frac{1}{\sqrt{a}}$ の分母と分子に $\sqrt{a}$ をかけて、

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

とすることで確認できる。

さて、 $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ となることを利用すれば、

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3.162277660\dots}{10} = \boxed{0.3162277660}\dots$$

となり、(電卓も不要で) 小数第 10 位まで正確に求まる。

(3) やはり、 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1.414213562\dots} = 1 \div 1.414213562\dots$ の計算はしたくないし、

小数第 9 位に誤差が入ってくる可能性がある。

(1) と同様にして $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となることを利用すれば、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.414213562\dots}{2} = 0.707106781\dots$$

となり、 $\boxed{\text{小数第 9 位まで}}$ は正確に求められる。

問3.2

$$(1) \quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \boxed{\frac{\sqrt{42}}{7}}$$

$(\sqrt{7})^2=7$

$$(2) \quad \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$(\sqrt{5})^2=5$

$$(3) \quad \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{5}}$$

$(\sqrt{5})^2=5$

$$(4) \quad \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\cancel{6}\sqrt{3}}{1\cancel{3}} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

$(\sqrt{3})^2=3$

$$(5) \quad \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$2 \times (\sqrt{3})^2 = 2 \times 3 = 6$

$$(6) \quad \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4 \times 6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}^1}{\sqrt{6}_1} = \boxed{2}$$

$$(\text{別解}) \quad \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{24^4}{6_1^4}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$$

問3.3

$$(1) \quad \sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{15}}{5}}$$

$$(2) \quad \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

$$(3) \quad \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{1}_1 2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

$$(4) \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{1\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}_2 \sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$(\text{別解}) \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3^1}{6_2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$(5) \quad \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{1\cancel{\sqrt{6}}}{\cancel{3}_3 \sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$(6) \quad \frac{\sqrt{1200}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{1200^{100}}{12_1}} = \sqrt{100} = \boxed{10}$$

問3.4

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{5}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{24}}{4} &= \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{6}}{4} \\
 &= \frac{5}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1\cancel{2}\sqrt{6}}{2\cancel{4}} \\
 &= \frac{5\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} \\
 &= \frac{5\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6}}{6} \\
 &= \frac{(5+2-3)\sqrt{6}}{6} \\
 &= \frac{2\sqrt{6}}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}} &= \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{3} \\
 &= \frac{9\sqrt{2} - 2(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{6} \\
 &= \frac{9\sqrt{2} - 2\sqrt{6} \oplus 6\sqrt{2}}{6} = \boxed{\frac{15\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{6}}
 \end{aligned}$$

問3.5

$$\sqrt{2}x - 3 = \sqrt{18}x + 5$$

$$\sqrt{2}x - 3 = 3\sqrt{2}x + 5$$

$$\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}x = 5 + 3$$

$$-2\sqrt{2}x = 8$$

$$x = -\cancel{8}^4 \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{2\cancel{4}\sqrt{2}}{1\cancel{2}}$$

よって、 $\boxed{x = -2\sqrt{2}}$

問3.6

- (1) 長さ L m の振り子の周期は $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 秒なので、これが 2 秒となるのは、

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \frac{1}{\pi} = \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \frac{1}{\pi^2} = \frac{L}{g} \quad \therefore L = \frac{g}{\pi^2}$$

のときである。これを計算すると、

$$L = \frac{g}{\pi^2} \approx \frac{9.8}{3.14^2} = 0.99\cdots$$

なので、長さ L は約 1m である。

- (2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\underbrace{\sqrt{\frac{1}{g}}}_{\text{定数}} \times \sqrt{l}$ なので、周期 T は $\sqrt{l}$ に比例する。したがって、長さ l を

$$L \text{ から } \frac{L}{2} \text{ にすると、周期は } \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 倍になる。}$$

問3.7

問 3.6 でみたように、振り子の長さが約 1m のときの周期は 2 秒である。

また、周期 T は振り子の長さ l の平方根 $\sqrt{l}$ に比例するので、周期が 12 秒、すなわち、周期 2 秒の $6(=\sqrt{36})$ 倍になるのは、振り子の長さが 36 倍になるときである。

よって、ハイジのブランコのロープの長さは、約 36m となり、最も近いのは (5)