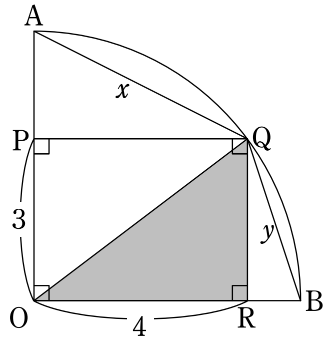
中2数学B　2019年度春期講習　本問解答
§5　東大入試に挑戦

※　欠席してしまった場合は、§4 までの知識を活用して、問 5.1～問 5.3 に自分で取り組んでみよう。

問5.1



(1)　△OQR にピタゴラスの定理を用いて、

$$OQ^2 = OR^2 + QR^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

なので、$OQ = 5\ (>0)$ である。

よって、半径は $\boxed{5}$

(2)　(1)より、$OA = 5$ だから、

$AP = OA - OP = 5 - 3 = 2$ である。

△APQ にピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2 = AP^2 + PQ^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$\therefore\ x = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}\ (>0)$$

同様に、$BR = OB - OR = 5 - 4 = 1$ なので、△BRQ にピタゴラスの定理を用いて、

$$y^2 = BR^2 + RQ^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

$$\therefore\ y = \boxed{\sqrt{10}}\ (>0)$$

問5.2

△BDE に注目する。

△BCE は $BC = CE$ の二等辺三角形であり、

$$\angle BCE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

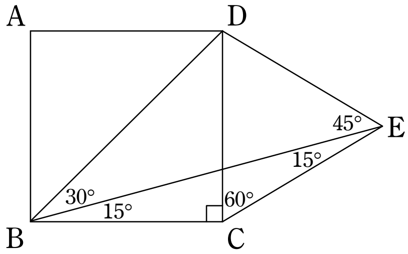
なので、

$$\angle CBE = \angle CEB = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$$

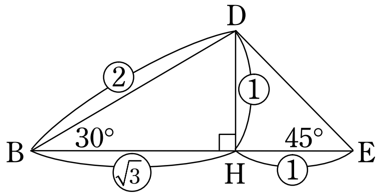
したがって、

$$\angle DBE = \angle DBC - \angle EBC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

$$\angle DEB = \angle DEC - \angle CEB = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$$



である。よって、D から BE に下ろした垂線の足を H とすると、△BDH は 30°, 60°, 90° の直角三角形で、△DEH は直角二等辺三角形になる。



すると、

△BDH の 3 辺の比　$BD : DH : BH = 2 : 1 : \sqrt{3}$

△DEH の 3 辺の比　$DH : EH : DE = 1 : 1 : \sqrt{2}$

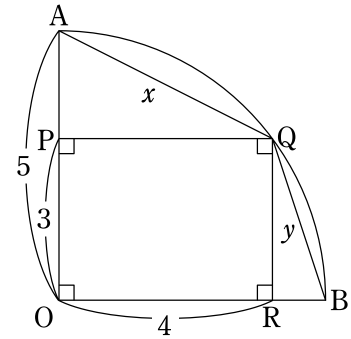
より、

$$BD : BE = 2 : \left(\sqrt{3} + 1\right)$$

△ABD は直角二等辺三角形で $BD = \sqrt{2} \times AB = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$ なので、

$$BE = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \times BD = \frac{\sqrt{3}+1}{{}_1\cancel{2}} \times {}^1\cancel{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right) = \boxed{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

問5.3



$\boxed{解1}$ 問 5.1 の四分円において、弧 AB の長さが、

$$AQ + QB = x + y = 2\sqrt{5} + \sqrt{10}$$

より長くなることに注目してみよう。
弧 AB の長さは、

$$2 \times 5 \times \pi \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}\pi$$

なので、

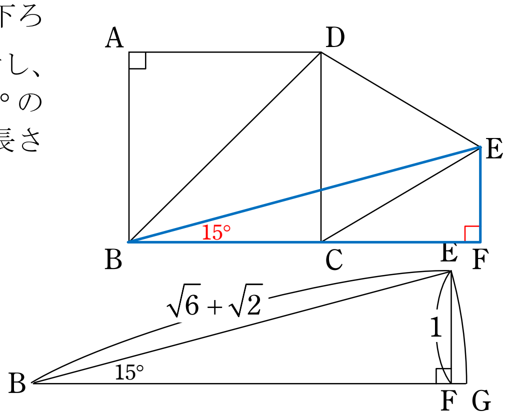
$$\frac{5}{2}\pi > 2\sqrt{5} + \sqrt{10} \qquad \therefore \pi > \frac{2}{5} \times \left(2\sqrt{5} + \sqrt{10}\right)$$

となる。ここで、

$$\sqrt{5} = 2.2360\cdots > 2.236,\ \sqrt{10} = 3.1622\cdots > 3.162$$

であることを用いれば、

$$\pi > \frac{2}{5} \times \left(2\sqrt{5} + \sqrt{10}\right) > \frac{2}{5} \times (2 \times 2.236 + 3.162) = 3.0536 \qquad \therefore \pi > 3.05$$



$\boxed{解2}$ 問 5.2 において、E から BC の延長に下ろした垂線の足を F とおく。直角三角形 BEF に対し、B を中心として、BE を半径とする、中心角 15° の扇形 EBG を描くとき、弧 EG の長さが EF の長さより長くなることに注目してみよう。
弧 EG の長さは

$$2 \times \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \times \pi \times \frac{15^\circ}{360^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{12}\pi$$

なので、これが EF = 1 より長いことから

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{12}\pi > 1 \qquad \therefore \pi > \frac{12}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

となる。

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} = 2.449\cdots + 1.414\cdots < 2.45 + 1.42 = 3.87$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} > \frac{1}{3.87}$$

であることを用いれば、

$$\pi > \frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} > \frac{12}{3.87} = 3.10\cdots$$

$$\therefore \pi > 3.05$$