中2数学C　2019年度春期講習　本問解答
§1　平方根とルート記号

※　欠席してしまった場合は、問 1.2～問 1.6 を（余裕があれば問 1.7 も）自分で確認し、p.9 の宿題 H1.1～H1.4 に取り組んで提出してください。

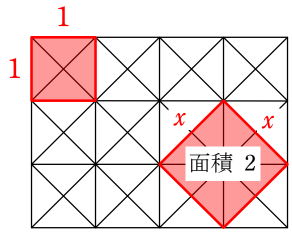
問1.1

2 乗すると 2 となる正の数を（存在するとして）x とおく。

(1)　$1^2 = 1 < x^2 = 2 < 2^2 = 4$ より、$1 < x < 2$ である。
1 と 2 の間に整数はないので、x は整数ではない。
したがって、2 乗すると 2 となる整数は存在しない。

(2)　$1.4^2 = 1.96 < x^2 = 2 < 1.5^2 = 2.25$ より、$1.4 < x < 1.5$ なので、$x = 1.4\cdots$ である。
さらに、$1.41^2 = 1.9881 < x^2 = 2 < 1.42^2 = 2.0164$ より、$1.41 < x < 1.42$ なので、
$x = \boxed{1.41}\cdots$ である。

(3)　ピタゴラスは、右図のように、面積 2 の正方形の 1 辺の長さとして、2 乗すると 2 となる数 x の存在に気付いたといわれている。



問1.2

(1)　「2 乗して…になる数」には、正の数と負の数があることに注意しよう。

(i)　$\boxed{3, -3}$　　(ii)　$\boxed{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$

(iii)　2 乗して負の数になる実数はないので、答は $\boxed{\text{なし}}$ である。

(2)　「2 乗したらいくつになるか」を問われているだけである。

(i)　$4 = \sqrt{4^2} = \sqrt{\boxed{16}}$

(ii)　$0.9 = \sqrt{0.9^2} = \sqrt{\boxed{0.81}}$

(iii)　$\pi = \sqrt{\boxed{\pi^2}}$

問1.3

$\sqrt{\ }$ を用いて表されるのは、平方根のうち、正のものであることに注意しよう。

(1) $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=\boxed{3}$

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

(3) $\sqrt{1.69}=\sqrt{1.3^2}=\boxed{1.3}$

(4) $\sqrt{\dfrac{1}{1.69}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{1.3}\right)^2}=\dfrac{1}{1.3}=\boxed{\dfrac{10}{13}}$

(5) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\sqrt{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\boxed{\dfrac{4}{5}}$

(6) $\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}\right)^2}=\boxed{\dfrac{5}{4}}$

(7) $\sqrt{\pi}$ は「2 乗したら π になる正の数」なので、2 乗したら当然 π になる。

$\therefore (\sqrt{\pi})^2=\boxed{\pi}$

(8) $-\sqrt{\pi}$ は「2 乗したら π になる負の数」なので、2 乗したら当然 π になる。

$\therefore (-\sqrt{\pi})^2=\boxed{\pi}$

(9) $\sqrt{(-\pi)^2}$ は「$(-\pi)^2$ の平方根 $-\pi,\pi$ のうち、正のもの」なので、π になる。

$\therefore \sqrt{(-\pi)^2}=\boxed{\pi}$

(10) $\sqrt{\sqrt{5}}$ は「2 乗して $\sqrt{5}$ になる正の数」なので、2 乗したら当然 $\sqrt{5}$ になる。

$\therefore \left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^2=\boxed{\sqrt{5}}$

問1.4

(1)　面積 a, b の正方形の 1 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ となる。
2 つの正方形のうち、面積が大きい方と、1 辺の長さが長い方は一致するので、

$a < b$ であることと $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ であることは同じこと ……………………………… ☆

になる。

(2)　☆を利用して、$\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{5}, 2 = \underline{\underline{\sqrt{4}}}$ の大きさを比べると、

$3 < 4 < 5 < 7$　　より　　$\sqrt{3} < \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{7}$

となる。よって、$\boxed{\sqrt{3} < 2 < \sqrt{5} < \sqrt{7}}$ である。

(3)　$\pi^2 < 3.15^2 = 9.9225 < 10$ なので、☆より

$\boxed{\pi < \sqrt{10}}$

と分かる。

※　$\sqrt{10} = 3.16\cdots$ である。

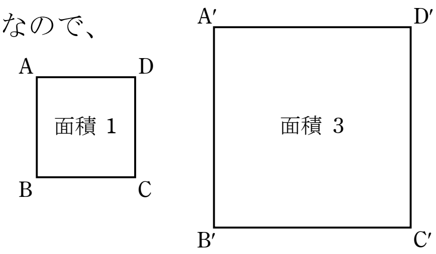
問1.5

相似比が $x : y$ のとき、面積比は $x^2 : y^2$ なので、
面積比が $S : T$ のとき、相似比は $\sqrt{S} : \sqrt{T}$ となる。

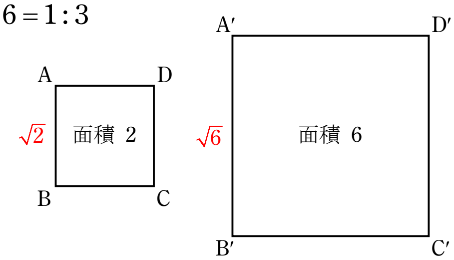
(1)　正方形 ABCD と正方形 A′B′C′D′ の面積比が $1:3$ なので、
相似比は $\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} = 1 : \sqrt{3}$ となる。

つまり、A′B′ の長さは AB の長さの $\boxed{\sqrt{3}\text{ 倍}}$

である。

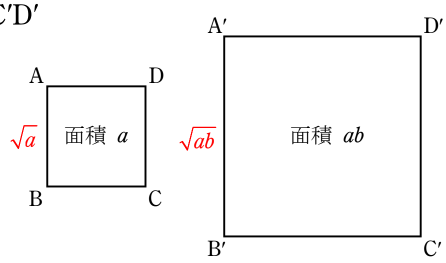


(2)　正方形 ABCD と正方形 A′B′C′D′ の面積比が $2:6=1:3$
なので、相似比は $\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} = 1 : \sqrt{3}$，すなわち、
正方形 A′B′C′D′ は、正方形 ABCD を、
$\left(\boxed{\sqrt{3}}\right)$ 倍に相似拡大したものである。
したがって、$\mathrm{A'B'} = \sqrt{3} \times \mathrm{AB}$ で、
$\mathrm{AB} = \sqrt{2}, \mathrm{A'B'} = \sqrt{6}$ なので、
$\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \boxed{\sqrt{3}}$



(3) 面積aの正方形ABCDと面積abの正方形A′B′C′D′を考える。面積比が$a:ab=1:b$なので、
相似比は$\sqrt{1}:\sqrt{b}=1:\sqrt{b}$となる。
したがって、A′B′$=\sqrt{b}\times$ABで、
AB$=\sqrt{a}$, A′B′$=\sqrt{ab}$なので、

$$\boxed{\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}}$$



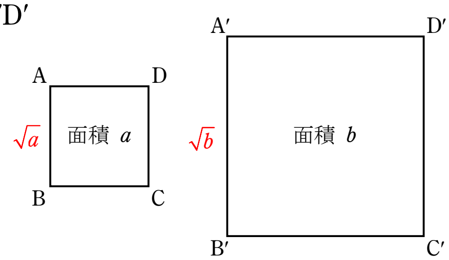
が成り立つことが分かった。
これは次のように代数的に示すこともできる：

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2&=\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)\times\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)\\&=\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{b}\\&=\left(\sqrt{a}\right)^2\times\left(\sqrt{b}\right)^2\\&=a\times b=ab\end{aligned}$$

なので、$\sqrt{a}\sqrt{b}$はabの平方根である。
また、$\sqrt{a},\sqrt{b}$は正の数なので、$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$も正の数である。
以上より、$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$はabの正の平方根であり、これは$\sqrt{ab}$に他ならない。

(4) 面積aの正方形ABCDと面積bの正方形A′B′C′D′を考える。面積比が$a:b=1:\dfrac{b}{a}$なので、
相似比は$\sqrt{1}:\sqrt{\dfrac{b}{a}}=1:\sqrt{\dfrac{b}{a}}$となる。
したがって、A′B′$=\sqrt{\dfrac{b}{a}}\times$ABで、
AB$=\sqrt{a}$, A′B′$=\sqrt{b}$なので、

$$\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{b}\qquad\therefore\ \boxed{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}}$$



が成り立つことが分かった。
これは次のように、(3)の結果を使って、代数的に示すこともできる：
$a,\dfrac{b}{a}$は正の数なので、(3)より、

$$\sqrt{a}\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\cancel{a}\times\frac{b}{\cancel{a}}}=\sqrt{b}\qquad\therefore\ \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

問1.6

(1) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}=\sqrt{\boxed{6}}$

(2) $\sqrt{3}\sqrt{5}=\sqrt{3\times 5}=\sqrt{\boxed{15}}$

(3) $2\sqrt{3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{\boxed{12}}$

(4) $3\sqrt{3}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}=\sqrt{9\times 3}=\sqrt{\boxed{27}}$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{\boxed{\dfrac{1}{3}}}$

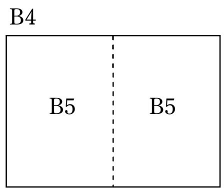
(6) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\boxed{\dfrac{2}{3}}}$

(7) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\boxed{\dfrac{4}{3}}}$

(8) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{9}{3}}=\sqrt{\boxed{3}}$

問1.7

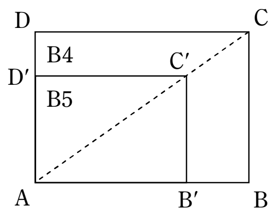
B4 と B5 の面積比は$2:1$なので、相似比は$\sqrt{2}:1$である。



(1) B4→B5 のコピーの倍率は$\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$倍。

(2) B5→B4 のコピーの倍率は$\boxed{\sqrt{2}}$倍。

(3) (2)より、B5 の短辺の長さ$\mathrm{B'C'}$を$\sqrt{2}$倍すると、B4 の短辺の長さBCとなる。これは、B5 の長辺の長さ$\mathrm{AB'}$と同じ長さである。よって、B5 の短辺と長辺の長さの比が$\boxed{\mathrm{B'C'}:\mathrm{AB'}=1:\sqrt{2}}$と分かる。



さらに、このことから$\mathrm{B'C'}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{AB'}$であるが、一方で

$\mathrm{B'C'}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\ \mathrm{AB'}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{AB'}$でもあるので、

$\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$であることも分かる。これについては、§3 で再確認する。

問1.8

(1) 有理数の範囲に 2 乗して 2 になる数があるかどうかを考えたいが、まず

「整数でない有理数を 2 乗して整数になるか」

という問題を考える。

整数でない有理数 r は、

$$r=\frac{n}{m}$$ （m は 1 でない自然数、n は整数であり、m, n は互いに素）

と、既約分数に表せる。このとき、

$$r^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2=\frac{n^2}{m^2}$$

だが、m, n が互いに素、つまり、m, n を素因数分解したとき共通の素数が現れないとき、m^2, n^2 の素因数分解に共通して現れる素数もないので、m^2, n^2 は互いに素な自然数となり、$\frac{n^2}{m^2}$ は既約分数となっている。さらに、$m \neq 1$ より、分母 m^2 は 1 でないので、r^2 は整数とはならない。

つまり、

「整数でない有理数を 2 乗しても整数にはならない」……………………… ☆

ということが分かった。

さて、$\sqrt{2}$ は 2 乗して整数になる数である。☆より、このような数が有理数のなかにあるとしたら、それは整数である。ところが、2 は平方数ではないので、整数のなかに 2 乗して 2 になる数はない。

したがって、2 乗して 2 になる数は有理数のなかにはなく、$\sqrt{2}$ は有理数ではない（つまり無理数である）ことが示された。

(2) (1)と全く同様である。

(3) 背理法で証明する。

$x=2+\sqrt{3}$ とおき、これが有理数だと仮定する。すると、$\sqrt{3}=x-2$ で、x が有理数であるという仮定より、この右辺も有理数となる。ところが、3 は平方数ではないので、(2)より $\sqrt{3}$ は有理数ではなく、これは矛盾。よって、$x=2+\sqrt{3}$ は無理数である。