

中2数学C 2019年度春期講習 本問解答

§4 ピタゴラスの定理の応用

※ 欠席してしまった場合は、問4.1, 本解答 p.3 の「三角定規の3辺の長さの比」, 問4.3～問4.5 を(余裕があれば問4.2, 問4.6 も) 自分で確認し、p.24 の宿題 H4.1～H4.4 に取り組んで提出してください。

問4.1

まず、(i)の二等辺三角形について考える。

- (1) $AB=AC$ の二等辺三角形なので、A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、 $BH=CH=3$ となる。

$\triangle ABH$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$7^2 = 3^2 + AH^2$$

$$AH^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$$

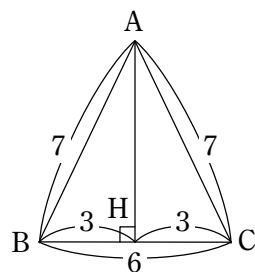
$$\therefore AH = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad (AH > 0 \text{ より})$$

したがって、

$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{10} = \boxed{6\sqrt{10}}$$

で、これを小数第1位まで正確に求めると、 $\sqrt{10} = 3.162\cdots$ なので、

$$S = 6\sqrt{10} = \boxed{18.9}\cdots$$



- (2) 内接円の中心(内心)を I とし、内接円と辺 AB, BC, CA との接点をそれぞれ D, E, F とすると、ID, IE, IF は辺 AB, BC, CA と垂直である (E は BC の中点となり、H と一致するが、このことは今は使わない)。

したがって、 S は、 r を用いて

$$S = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$$

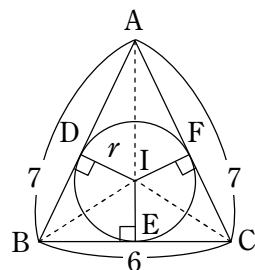
$$= \frac{1}{2} \times AB \times ID + \frac{1}{2} \times BC \times IE + \frac{1}{2} \times CA \times IF$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times r + \frac{1}{2} \times 6 \times r + \frac{1}{2} \times 7 \times r$$

$$= \frac{1}{2} \times (7 + 6 + 7) \times r = 10r$$

と表せる。よって、(1)の結果とあわせて

$$10r = 6\sqrt{10} \quad \therefore r = 6\sqrt{10} \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{5}}$$



(ii)についてもまったく同様である。

(1) A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、

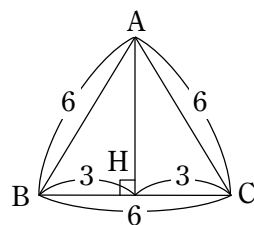
$$AH = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = \boxed{9\sqrt{3}}$$

で、これを小数第 1 位まで正確に求めると、

$$\sqrt{3} = 1.732 \dots \text{なので}$$

$$S = 9 \times \sqrt{3} = \boxed{15.5} \dots$$



(2) 内接円の中心を I とし、内接円と辺 AB, BC, CA との接点をそれぞれ D, E, F とすると、

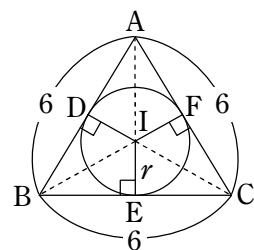
$$S = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times ID + \frac{1}{2} \times BC \times IE + \frac{1}{2} \times CA \times IF$$

$$= \frac{1}{2} \times (6 + 6 + 6) \times r = 9r$$

と表せる。よって、(1)の結果とあわせて

$$9r = 9\sqrt{3} \quad \therefore r = 9\sqrt{3} \times \frac{1}{9} = \boxed{\sqrt{3}}$$



問4.2

(1) A4 判の対角線の長さと B4 判の長い方の辺の長さが同じになる。

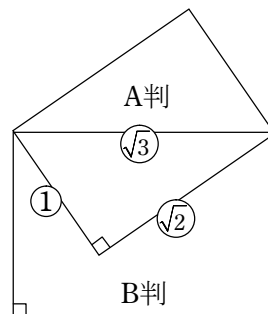
(2) (1)で述べた関係は、A0 判と B0 判についても同じである。また、問 1.7 でみたように、コピー用紙の長い方の辺と短い方の辺の比は $\sqrt{2}:1$ (これは A 判でも B 判でも同様) である。

よって、A0 判の短い方の辺を x とおくと、長い方の辺は $\sqrt{2}x$ で、右図の A 判, B 判の重なり直角三角形にピタゴラスの定理を用いれば、B0 判の長い方の辺は

$$\sqrt{x^2 + (\sqrt{2}x)^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

となる。したがって、A0 判と B0 判の相似比は $\sqrt{2}x : \sqrt{3}x = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ である。

これより面積比は $2:3$ と分かるから、B0 判の面積は A0 判の面積の 1.5 倍で、 $\boxed{1.5\text{m}^2}$ である。



三角定規の 3 辺の長さの比

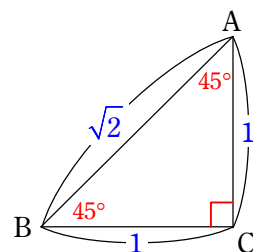
AC = BC = 1 の直角二等辺三角形 ABC の斜辺 AB の長さは、ピタゴラスの定理より

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\therefore AB = \sqrt{2} \quad (AB > 0 \text{ なので})$$

となり、3 辺の長さは右図のようになる。

すべての直角二等辺三角形は△ABC と相似なので、3 辺の長さの比は右図の△ABC と同じになる。



∠A = 30°, ∠B = 60°, ∠C = 90° で、AB = 2 の直角三角形 ABC は、右図の正三角形 ABD の半分になっていて、BC = CD = 1 である。△ABC にピタゴラスの定理を用いて、

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

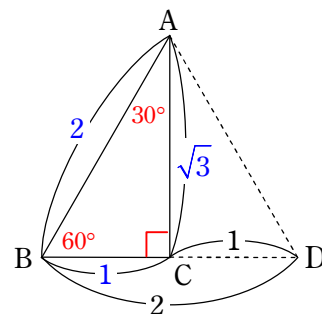
$$2^2 = AC^2 + 1^2$$

$$AC^2 = 4 - 1 = 3$$

$$\therefore AC = \sqrt{3} \quad (AC > 0 \text{ より})$$

となり、3 辺の長さは右図のようになる。

30°, 60°, 90° の三角定規の形の直角三角形は、すべて△ABC と相似なので、3 辺の長さの比は右図の△ABC と同じになる。



問4.3

- (1) $\triangle ABD$ は直角二等辺三角形なので、3 辺の比は

$$BA:AD:\underline{BD}=1:1:\sqrt{2} (= \sqrt{2}:\sqrt{2}:\underline{2})$$

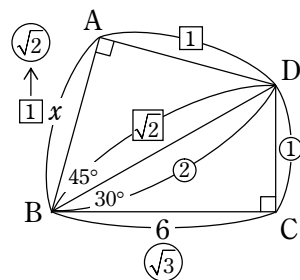
であり、また、 $\triangle BDC$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので、3 辺の比は

$$\underline{BD}:DC:BC=\underline{2}:1:\sqrt{3}$$

である。よって、

$$BA:BD:BC=\sqrt{2}:2:\sqrt{3}$$

$$\text{となり、} x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times BC = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}_1} \times \cancel{6}^{2\sqrt{3}} = \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{6}}$$



- (2) A から BC に下した垂線の足を H とすると、 $\triangle ABH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので、3 辺の比は

$$AB:BH:HA=2:1:\sqrt{3}$$

よって、 $AB=4$ より、

$$BH = AB \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$AH = BH \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

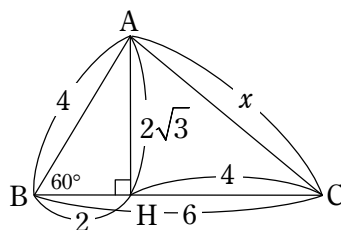
$$CH = BC - BH = 6 - 2 = 4$$

と求まる。

すると、 $\triangle ACH$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2 = AC^2 = 4^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16 + 12 = 28$$

$$\text{よって、} x > 0 \text{ より、} x = \sqrt{28} = \boxed{2\sqrt{7}}$$



- (3) A から BC に下した垂線の足を H とする。
 $\triangle ABH$ は直角二等辺三角形なので、3 辺の比は

$$AH:BH:AB=1:1:\sqrt{2}$$

であり、また、 $\triangle ACH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので、3 辺の比は

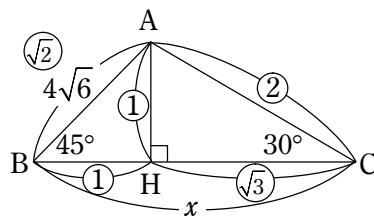
$$AC:AH:HC=2:1:\sqrt{3}$$

となっている。よって、

$$AB:BC = AB:(BH + HC) = \sqrt{2}:(1 + \sqrt{3})$$

なので、

$$x = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times AB = \frac{1 + \sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}_1} \times 4\sqrt{6}^{\sqrt{3}} = (1 + \sqrt{3}) \times 4\sqrt{3} = \boxed{4\sqrt{3} + 12}$$



- (4) BC と AD の交点を P とすると、 $\triangle PAB$ と $\triangle PCD$ はともに $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形になる。

まず、 $\triangle PCD$ に着目して、

$$CD:DP=1:\sqrt{3}$$

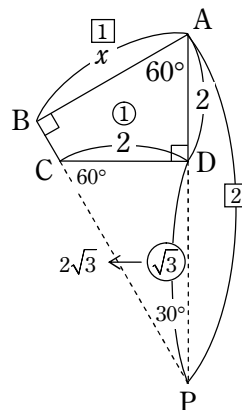
$$\therefore DP=\sqrt{3} \times CD=2\sqrt{3}$$

よって、 $AP=AD+DP=2+2\sqrt{3}$ と分かる。

すると、 $\triangle PAB$ に着目して、

$$AP:AB=2:1$$

$$\therefore AB=\frac{1}{2} \times AP=\frac{1}{2} \times (2+2\sqrt{3})=\boxed{1+\sqrt{3}}$$



- (5) $AB=AC$ の二等辺三角形なので、A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、 $BH=CH=9$ となる。

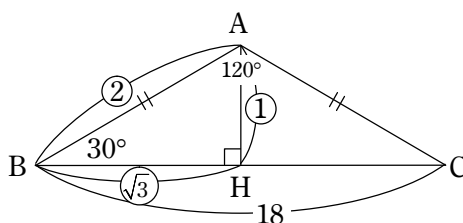
$\triangle ABH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので、

$$AH:BH=1:\sqrt{3}$$

$$\therefore AH=\frac{1}{\sqrt{3}} \times BH=\frac{1}{\sqrt{3}} \times 9=3\sqrt{3}$$

よって、

$$S=\frac{1}{2} \times BC \times AH=\frac{1}{2} \times 18 \times 3\sqrt{3}=\boxed{27\sqrt{3}}$$



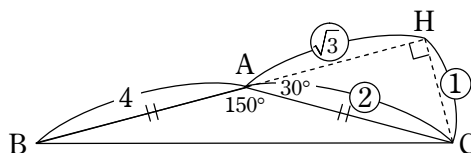
- (6) C から BA の延長に下した垂線の足を H とすると、 $\triangle CAH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので、

$$AC:CH=2:1$$

$$\therefore CH=\frac{1}{2} \times AC=\frac{1}{2} \times 4=2$$

よって、

$$S=\frac{1}{2} \times AB \times CH=\frac{1}{2} \times 4 \times 2=\boxed{4}$$



問4.4

- (1) 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC において、
A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、

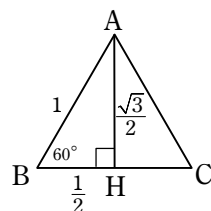
$$AH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ となり、}$$

求める面積は、

$$\frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

これを小数第 2 位まで求めると、 $\sqrt{3} = 1.732\cdots$ なので

$$\frac{1.732\cdots}{4} = \boxed{0.43}\cdots$$



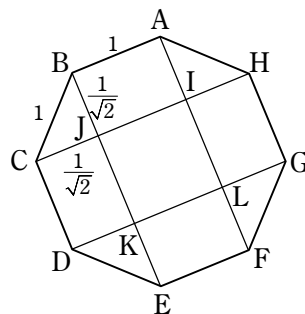
1 辺の長さが 1 の正八角形 ABCDEFGH は、
右図のように対角線の交点を I, J, K, L とおくと、
直角二等辺三角形 BCJ が 4 つ分と、長方形 ABJI が
4 つ分と、正方形 IJKL が 1 つ分に分けられる。
よって、

$$4 \times \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \frac{1}{2} \right\} + 4 \times \left(1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1^2$$

$$= 1 + 2\sqrt{2} + 1 = 2 + 2\sqrt{2}$$

これを小数第 2 位まで求めると、 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$

$$2 + 2 \times 1.414\cdots = \boxed{4.82}\cdots$$



△BDE に注目する。

$$\angle BCE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

なので、

$$\angle CBE = \angle CEB = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$$

したがって、

$$\angle DBE = \angle DBC - \angle EBC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

$$\angle DEB = \angle DEC - \angle CEB = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$$

となります。よって、D から BE に下ろした垂線の足を H とすると、 $\triangle BDH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形で、 $\triangle DEH$ は直角二等辺三角形になる。

すると、

$$\triangle BDH \text{ の } 3 \text{ 辺の比 } BD:DH:BH=2:1:\sqrt{3}$$

$$\triangle DEH \text{ の } 3 \text{ 辺の比 } DH:EH:DE=1:1:\sqrt{2}$$

より、

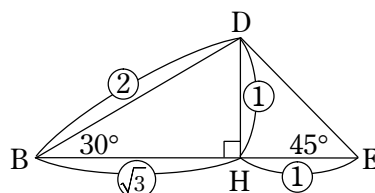
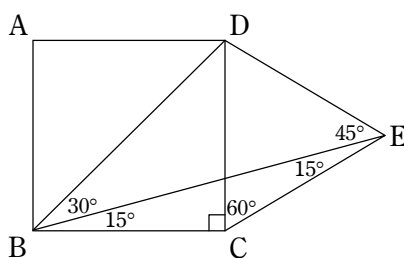
$$\text{BD}:\text{BE} = 2:(\sqrt{3}+1)$$

$\triangle ABD$ は直角二等辺三角形で $BD = \sqrt{2} \times AB = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$ なので、

$$\text{BE} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \times \text{BD} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \times \cancel{1} \cancel{2} \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1) = \boxed{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

これを小数第1位まで求めると、 $\sqrt{6}=2.44\dots$ 、 $\sqrt{2}=1.41\dots$ なので、

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} = 2.44\cdots + 1.41\cdots = \boxed{3.8}\cdots$$



問4.6

△ABC にピタゴラスの定理を用いて、

$$40^2 = 30^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 40^2 - 30^2 = 1600 - 900 = 700$$

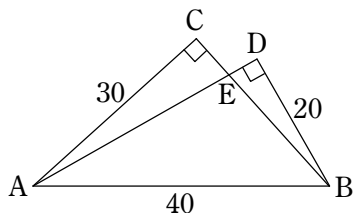
$$\therefore BC = \sqrt{700} = 10\sqrt{7} (> 0) \dots\dots\dots ①$$

△ABD にピタゴラスの定理を用いて、

$$40^2 = AD^2 + 20^2$$

$$AD^2 = 40^2 - 20^2 = 1600 - 400 = 1200$$

$$\therefore AD = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3} (> 0) \dots\dots\dots ②$$



一方、△ACE と △BDE において、

$$\angle ACE = \angle BDE \quad (= 90^\circ)$$

$$\angle AEC = \angle BED \quad (\text{対頂角})$$

なので、

$$\triangle ACE \sim \triangle BDE \quad (\text{二角相等})$$

△ACE と △BDE の相似比は

$$AC : BD = 30 : 20 = 3 : 2$$

なので、

$$AE : BE = 3 : 2$$

$$CE : DE = 3 : 2$$

となる。よって、 $AE = 3x$, $CE = 3y$ とおくと、 $BE = 2x$, $DE = 2y$ で、①, ② より

$$2x + 3y = 10\sqrt{7} \dots\dots\dots ③$$

$$3x + 2y = 20\sqrt{3} \dots\dots\dots ④$$

④×3－③×2 より

$$9x + 6y = 60\sqrt{3} \quad \dots\dots ④ \times 3$$

$$\begin{array}{r} -) 4x + 6y = 20\sqrt{7} \quad \dots\dots ③ \times 2 \\ \hline 5x \quad = 60\sqrt{3} - 20\sqrt{7} \end{array}$$

よって、 $x = 12\sqrt{3} - 4\sqrt{7}$ で、

$$AE = 3(12\sqrt{3} - 4\sqrt{7}) = \boxed{36\sqrt{3} - 12\sqrt{7}}$$

