中2数学C　2019年度春期　宿題解答
§4　ピタゴラスの定理の応用

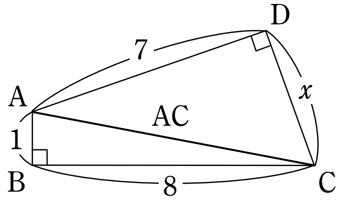
H4.1

(1)　ピタゴラスの定理より、

$$x^2+21^2=29^2$$
$$x^2=29^2-21^2=841-441=400=20^2$$

よって、$x>0$ より、$x=\boxed{20}$

(2)　△ABC にピタゴラスの定理を用いて、



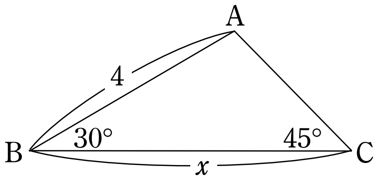
$$AC^2=1^2+8^2=65$$

△ADC にピタゴラスの定理を用いて、

$$AC^2=x^2+7^2$$
$$\therefore\quad x^2=65-49=16$$

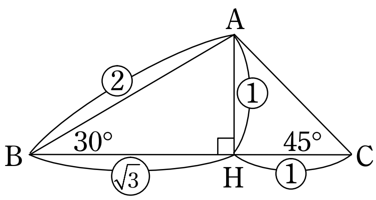
よって、$x>0$ より、$x=\boxed{4}$

(3)　A から BC に下した垂線の足を H とすると、
△ABH は 30°, 60°, 90° の直角三角形なので、
3 辺の比は



$$BA:AH:HB=2:1:\sqrt{3}$$

また、△ACH は直角二等辺三角形なので、
3 辺の比は



$$AH:CH:AC=1:1:\sqrt{2}$$

よって、

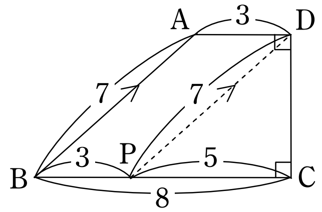
$$AB:BC=2:\left(\sqrt{3}+1\right)$$

となり、

$$x=BC=AB\times\frac{\sqrt{3}+1}{2}={}^{2}\cancel{4}\times\frac{\sqrt{3}+1}{{}_{1}\cancel{2}}=\boxed{2\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

H4.2

(1) D を通り AB に平行な直線を引き、BC との交点を P とすると、ABPD は平行四辺形で、DP, BP, CP の長さは右図のようになる。



△CDP にピタゴラスの定理を用いて、

$$5^2+\mathrm{CD}^2=7^2$$

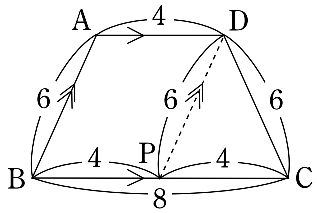
$$\mathrm{CD}^2=7^2-5^2=49-25=24$$

よって、$\mathrm{CD}>0$ より、$\mathrm{CD}=2\sqrt{6}$ である。

したがって、台形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2}\times(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\times\mathrm{CD}=\frac{1}{2}\times(3+8)\times2\sqrt{6}=\boxed{11\sqrt{6}}$$

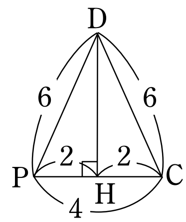
(2) D を通り AB に平行な直線を引き、BC との交点を P とすると、ABPD は平行四辺形で、DP, BP, CP の長さは右図のようになる。



△CDP は $\mathrm{DP}=\mathrm{DC}$ の二等辺三角形なので、D から PC に下した垂線の足を H とすると、H は PC の中点であり、

$$\mathrm{PH}=\mathrm{HC}=2$$

となる。



△DPH にピタゴラスの定理を用いて、

$$2^2+\mathrm{DH}^2=6^2$$

$$\mathrm{DH}^2=6^2-2^2=36-4=32$$

よって、$\mathrm{DH}>0$ より、$\mathrm{DH}=4\sqrt{2}$ である。

したがって、台形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2}\times(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\times\mathrm{DH}=\frac{1}{2}\times(4+8)\times4\sqrt{2}=\boxed{24\sqrt{2}}$$

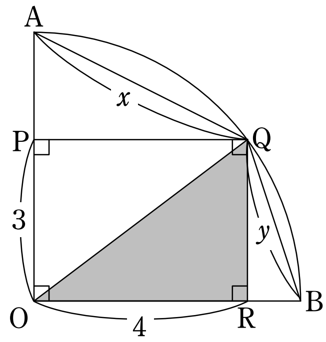
H4.3

(1)　△OQR にピタゴラスの定理を用いて、

$$OQ^2 = OR^2 + QR^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$\therefore OQ = 5\ (>0)$$

とわかる。よって、半径は $\boxed{5}$



(2)　(1)より OA = 5 だから、 AP = OA − OP = 5 − 3 = 2
なので、△APQ にピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2 = AP^2 + PQ^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$\therefore x = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}\ (>0)$$

同様に、 BR = OB − OR = 5 − 4 = 1 なので、
△BRQ にピタゴラスの定理を用いて、

$$y^2 = BR^2 + RQ^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

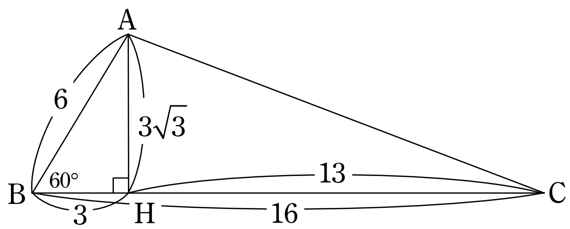
$$\therefore y = \boxed{\sqrt{10}}\ (>0)$$

H4.4

(1)　A から BC に下した垂線の足を H とすると、△ABH は 30°, 60°, 90° の直角三角形なので、3 辺の比は

$$AB : BH : HA = 2 : 1 : \sqrt{3}$$

よって、 AB = 6 より、



$$BH = AB \times \frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$AH = BH \times \sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$CH = BC - BH = 16 - 3 = 13$$

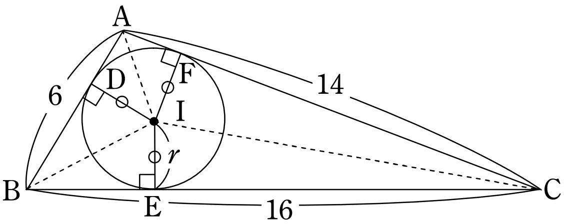
と求まる。
すると、△ACH にピタゴラスの定理を用いて、

$$AC^2 = 13^2 + (3\sqrt{3})^2 = 169 + 27 = 196 = 14^2$$

よって、 AC > 0 より、 AC = $\boxed{14}$ である。

(2)　$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 16 \times 3\sqrt{3} = \boxed{24\sqrt{3}}$

(3) 内接円の中心をI、半径をrとし、内接円とAB, BC, CAとの接点をそれぞれD, E, Fとおく。
半径ID, IE, IFは、それぞれ辺AB, BC, CAと垂直なので、△ABCの面積は、rを用いて



$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA \\ &= \frac{1}{2}\times AB\times ID + \frac{1}{2}\times BC\times IE + \frac{1}{2}\times CA\times IF \\ &= \frac{1}{2}\times 6\times r + \frac{1}{2}\times 16\times r + \frac{1}{2}\times 14\times r \\ &= (3+8+7)r = 18r\end{aligned}$$

と表せる。よって、(2)の結果とあわせて

$$18r = 24\sqrt{3} \qquad \therefore r = {}^{4}\cancel{24}\sqrt{3}\times\frac{1}{{}_{3}\cancel{18}} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

(4) AIの長さは△ADIでピタゴラスの定理を使って計算できる。
円の外部の点から、円に向けて引いた 2 本の接線の、接点までの距離は等しいので、

$AD = AF,\ BE = BD,\ CF = CE$

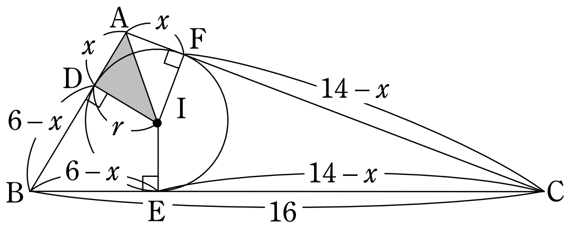
が成り立つ。
そこで、$AD = AF = x$ とおくと、

$BE = BD = AB - AD = 6 - x$
$CE = CF = AC - AF = 14 - x$

なので、BCの長さに注目して

$6 - x + 14 - x = 16 \qquad 20 - 2x = 16 \qquad \therefore x = 2$

である。



△ADIでピタゴラスの定理より、

$$AI^2 = x^2 + r^2 = 2^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4 + \frac{48}{9} = \frac{84}{9}$$

よって、$AI > 0$ より、$AI = \dfrac{\sqrt{84}}{3} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{21}}{3}}$