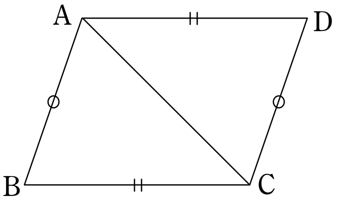
中2数学X　春期　§2　平行四辺形　本問解答

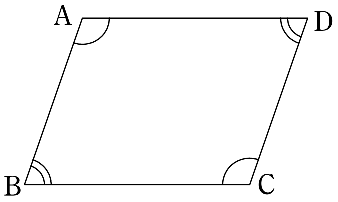
平行四辺形の条件の証明

(i)　2組の向かい合う辺が等しい四角形は平行四辺形である。



［仮定］　AB＝CD ………………………………………… ①
　　　　　AD＝CB ………………………………………… ②
［結論］　AB // DC , AD // BC
［証明］△ABC と△CDA において、
　　　　CA＝AC （共通） ………………………………… ③
　　　　①②③より、△ABC≡△CDA（ 三辺相等 ） …… ④
　　　　④より∠BAC＝∠DCA （対応角）なので、
　　　　　　　AB // DC（錯角定理）
　　　　④より∠BCA＝∠DAC （対応角）なので、
　　　　　　　AD // BC（錯角定理）　　　　　　(q.e.d.)

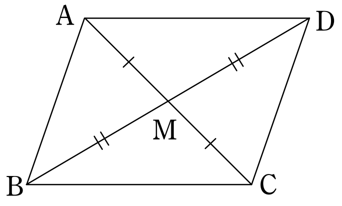
(ii)　2組の向かい合う角が等しい四角形は平行四辺形である。



［仮定］　∠A＝∠C ………………………………………… ①
　　　　　∠B＝∠D ………………………………………… ②
［結論］　AB // DC , AD // BC
［証明］四角形 ABCD の内角の和に注目して、
　　　　　∠A＋∠B＋∠C＋∠D＝360° ………………… ③
　　　　①②を③に代入すると、
　　　　　∠A＋∠D＋∠A＋∠D＝360°
　　　　∴ ∠A＋∠D＝180°
　　　　∴ AB // DC（ 同側内角定理 ）
　　　　同様に、①②③より、
　　　　　∠A＋∠B＋∠A＋∠B＝360°
　　　　∴ ∠A＋∠B＝180°
　　　　∴ AD // BC（ 同側内角定理 ）　　　　　　(q.e.d.)

(iii)　対角線が互いに他を二等分する四角形は平行四辺形である。

四角形 ABCD の対角線の交点を M とする。



［仮定］　対角線が互いに他を二等分する……………………………①

［結論］　AB // DC , AD // BC

［証明］△ABM と△ CDM において、

①より、 AM = CM ………………………………………………②

①より、 BM = DM ………………………………………………③

また、∠AMB = ∠CMD （ 対頂角定理 ） ……………………………④

②③④より、△ABM≡△ CDM （ 二辺夾角相等 ）

よって、∠BAM=∠ DCM （対応角）

ゆえに、AB // DC（ 錯角定理 ）

となり、結論の一つが示された。

△ADM と△CBM において、

∠AMD = ∠CMB （ 対頂角定理 ） …………………………⑤

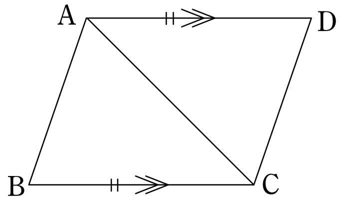
②③⑤より、△ADM≡△CBM（ 二辺夾角相等 ）

よって、∠ADM = ∠CBM （合同の対応角）

ゆえに、AD // BC（ 錯角定理 ）

となり、もう一つの結論が示された。　　　　　　(q.e.d.)

(iv)　1 組の向かい合う辺が平行かつ等しい四角形は平行四辺形である。



［仮定］　BC // DA ………………………………………………………①

BC=DA ………………………………………………………②

［結論］　AB // DC（結論はひとつ）

［証明］△ABC と△CDA において、

①より、∠BCA = ∠DAC （ 錯角定理 ） …………………………③

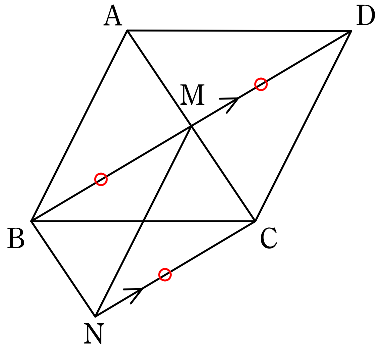
また、　CA = AC （ 共通 ） ……………………………………………④

②③④より、△ABC≡△CDA（ 二辺夾角相等 ）

よって、∠BAC = ∠DCA （合同の対応角） ………………………⑤

⑤より、AB // DC（ 錯角定理 ）　　　　　　(q.e.d.)

問2.1



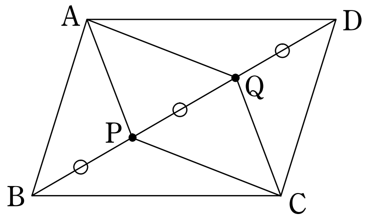
［仮定］
ABCD は平行四辺形 ………………………………①
BMCN は平行四辺形 ………………………………②
［結論］
CDMN は平行四辺形

［方針］
四角形が平行四辺形であることを証明したいなら、まずは平行な辺があるかどうかを確認するのは自然なことです。1 組の平行な辺が見つかったら、他方も平行かどうか調べ、それがよく分からない場合には、最初に見つけた平行な 2 辺が等しいかどうかを考えてみるのが妥当でしょう。
［証明］
②より　　BM // NC
　　∴　MD // NC ……………………………………③

①より　　MD = BM ……………………………………④
②より　　BM = NC ……………………………………⑤
④,⑤より　MD = NC ……………………………………⑥

③,⑥より、1 組の向かい合う辺が平行かつ等しいので
　　　　CDMN は平行四辺形　　　　　　　　(q.e.d.)

問2.2



［仮定］ABCD は平行四辺形…………………………①
　　　　BP = PQ = QD ………………………………②
［結論］APCQ は平行四辺形
［証明その 1］
　△ABP と△CDQ において、
　①より、　AB = CD ……………………………………………③
　①より、AB // DC なので、
　　　　∠ABP = ∠CDQ（　錯角定理　）…………………④
　②より、　BP = DQ ……………………………………………⑤
　③④⑤より、△ABP≡△CDQ（　二辺夾角相等　）…………⑥
　⑥より、　AP = CQ　（　対応辺　）…………………………⑦
　同様に、△BCP と△DAQ において、
　①より、　BC = DA ……………………………………………⑧
　①より、AD // BC なので、∠CBP = ∠ADQ（　錯角定理　）………⑨
　⑤⑧⑨より、△BCP≡△DAQ（　二辺夾角相等　）…………⑩
　⑩より、　CP = AQ　（　対応辺　）…………………………⑪
　⑦⑪より、2 組の向かい合う辺が等しいので、APCQ は平行四辺形
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(q.e.d.)

［証明その 1'］

△ABP と△CDQ において、

①より、　AB = CD ………………………………………………… ③

①より、AB // DC なので、

∠ABP = ∠CDQ（　錯角定理　） ……………………… ④

②より、　BP = DQ ………………………………………………… ⑤

③④⑤より、△ABP≡△CDQ（　二辺夾角相等　） ………… ⑥

⑥より、　AP = CQ　（　対応辺　） ………………………… ⑦

⑥より、　∠APB = ∠CQD　（　対応角　） ………………… ⑧

ここで、　∠APQ = 180°－∠APB

= 180°－∠CQD　（　⑧より　）

= ∠CQP

∴　∠APQ = ∠CQP ………………………………………… ⑨

⑨より、AP // QC　（　錯角定理　） ………………………… ⑩

⑦⑩より、1 組の向かい合う辺が平行かつ等しいので、APCQ は平行四辺形

(q.e.d.)

［証明その 2］

対角線 AC と BD の交点を M とする。

①より、AM = CM ………………………………………………… ③

BM = DM ………………………………………………… ④

ここで、PM = BM – BP

= DM – DQ（　②④より　）

= QM

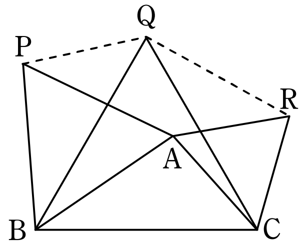
∴　PM = QM ………………………………………………… ⑤

③⑤より、対角線が互いに他を 2 等分するので、APCQ は平行四辺形

(q.e.d.)

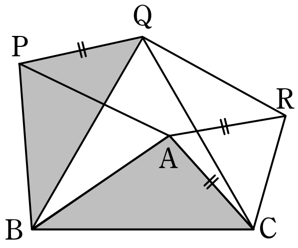
問2.3

［仮定］
△PAB は正三角形……………………………①
△QBC は正三角形……………………………②
△RCA は正三角形……………………………③

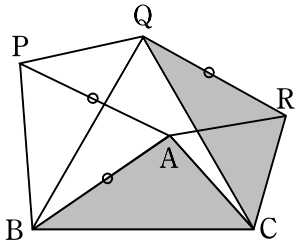


［結論］
APQR は平行四辺形

［証明］
△BPQ と△BAC において
①より　　BP＝BA ……………………………④
②より　　BQ＝BC ……………………………⑤
また　　　∠PBQ＝∠PBA－∠QBA
　　　　　　＝60°－∠QBA　（①より）……⑥
　　　　　∠ABC＝∠QBC－∠QBA
　　　　　　＝60°－∠QBA　（②より）……⑦
⑥,⑦より　∠PBQ＝∠ABC ……………………⑧
④,⑤,⑧より　△BPQ≡△BAC　（二辺夾角相等）……⑨
⑨より　　PQ＝AC　（対応辺）………………⑩
③より　　AC＝AR ……………………………⑪
⑩,⑪より　PQ＝AR ……………………………⑫



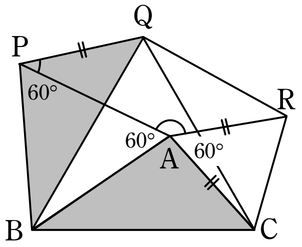
同様に、△QRC と△BAC において
③より　　CR＝CA ……………………………⑬
②より　　CQ＝CB ……………………………⑭
また　　　∠RCQ＝∠RCA－∠QCA
　　　　　　＝60°－∠QCA　（③より）……⑮
　　　　　∠ACB＝∠QCB－∠QCA
　　　　　　＝60°－∠QCA　（②より）……⑯
⑮,⑯より　∠RCQ＝∠ACB ……………………⑰
⑬,⑭,⑰より　△QRC≡△BAC　（二辺夾角相等）……⑱
⑱より　　RQ＝AB　（対応辺）………………⑲
①より　　AB＝AP ……………………………⑳
⑲,⑳より　RQ＝AP ……………………………㉑



⑫,㉑より、2 組の向かい合う辺が等しいので
　　　　APQR は平行四辺形　　　　　　　　(q.e.d.)

上の方針は単純ですが、二度目の合同を示さずとも、⑬以降を次のようにして⑨の合同のみで証明することもできます。

［証明］
（⑫までは上の証明と同じ。番号は⑬から振り直しています）
⑨より　　∠QPB＝∠CAB　（対応角）…………⑬
すると　　∠APQ＝∠QPB－∠APB
　　　　　　＝∠QPB－60°　（①より）……⑭
　　　　　∠PAR＝360°－∠PAB－∠CAB－∠RAC
　　　　　　＝360°－60°－∠CAB－60°　（①,③より）
　　　　　　＝240°－∠CAB ………………⑮



⑭,⑮より　$\angle APQ + \angle PAR = \angle QPB - 60^\circ + 240^\circ - \angle CAB$

$= 180^\circ + \angle QPB - \angle CAB$

∴　$\angle APQ + \angle PAR = 180^\circ$　（⑬より）........⑯

⑯より　$PQ \,/\!/\, AR$　（同側内角定理）..................⑰

⑫,⑰より、1 組の向かい合う辺が平行かつ等しいので

APQR は平行四辺形　(q.e.d.)

問2.4

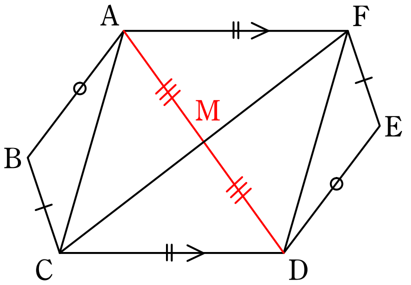
［仮定］

$AB = DE$ ....①

$BC = EF$ ....②

$CD = AF$ ....③

$CD \,/\!/\, AF$ ....④



［結論］

AD, BE, CF は一点で交わる

［方針］

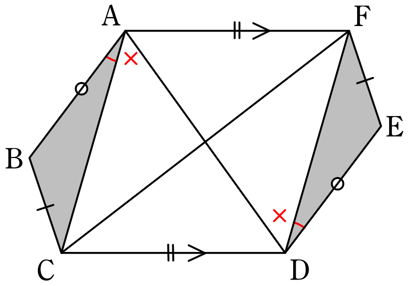
ACDF は平行四辺形なので、対角線 AD, CF は互いに他を 2 等分します。AD, BE, CF が一点で交わるということは、BE は AD と CF の交点、つまり AD の中点を通るということです。ABDE も平行四辺形であることが言えれば、対角線の BE, AD は互いに他を 2 等分するので、BE も AD の中点を通ることになります。

［証明］

③④より、1 組の向かい合う辺が平行かつ等しいので

ACDF は平行四辺形..............................⑤

⑤より、CF は AD と、AD の中点 M で交わる.........⑥



⑤より $AC \,/\!/\, DF$ なので、

$\angle CAD = \angle FDA$　（錯角定理）...............⑦

△ABC と△DEF において、

⑤より、　$AC = DF$ ....⑧

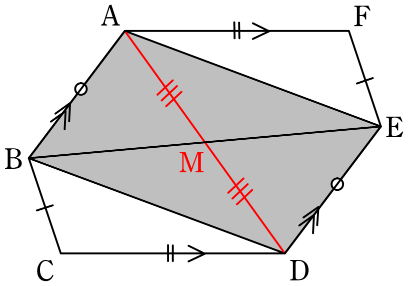
①②⑧より、$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$　（三辺相等）.............⑨

⑨より、　$\angle BAC = \angle EDF$　（対応角）...................⑩

⑦⑩より、　$\angle BAC + \angle CAD = \angle EDF + \angle FDA$

∴　$\angle BAD = \angle EDA$ ....⑪

⑪より、　$AB \,/\!/\, DE$　（錯角定理）.........................⑫



①⑫より、1 組の向かい合う辺が平行かつ等しいので、

ABDE は平行四辺形..............................⑬

⑬より、BE は AD と、AD の中点 M で交わる.........⑭

⑥⑭より、　AD, BE, CF は一点 M で交わる　(q.e.d.)