中2数学B　2020年度春期講習　本問解答
§3　分母の有理化

※　欠席してしまった場合は、問 3.1～問 3.5 を自分で確認し、p.22 の宿題 H3.1～H3.4 に取り組んで提出してください。

問3.1

(1)　面積 a の正方形 ABCD と面積 b の正方形 A′B′C′D′ を考える。面積比が $a:b=1:\frac{b}{a}$ なので、

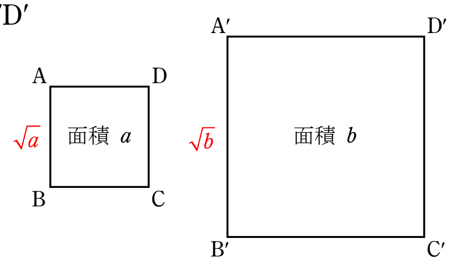
相似比は $\sqrt{1}:\sqrt{\frac{b}{a}}=1:\sqrt{\frac{b}{a}}$ となる。

したがって、$A'B'=\sqrt{\frac{b}{a}}\times AB$ で、

$AB=\sqrt{a}$, $A'B'=\sqrt{b}$ なので、

$\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{b}$　　$\therefore\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

が成り立つことが分かった。



(2)　$\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{3.162277660\cdots}=1\div3.162277660\cdots$ の計算はしたくないだろう。

（仮に電卓を使ったとしても、小数点以下 9 位に誤差が入ってくる可能性もある。）

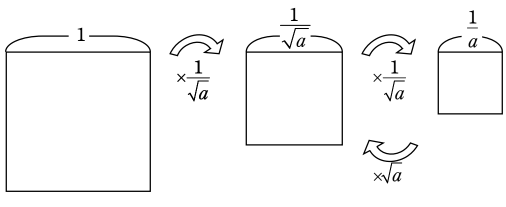
そこで $\frac{1}{\sqrt{10}}$ を書き換えて、分母にあるルートをなくすことを考えよう。

$\frac{1}{\sqrt{a}}$ 倍の相似変換を 2 回繰り返すと

$\frac{1}{a}$ 倍の相似変換になり、さらに

続けて $\sqrt{a}$ 倍の相似変換をすれば、

$\frac{1}{a}\times\sqrt{a}=\frac{\sqrt{a}}{a}$ 倍の相似変換をしたことになる。



$\frac{1}{\sqrt{a}}$ 倍の相似変換の逆の変換が $\sqrt{a}$ 倍の相似変換であることを考えると、結局、

全体としては単なる $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 倍の相似変換をしたことになる(上の図)。

したがって、$\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$ が成り立つことがわかる。これは，計算上は $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ の分母と分子に $\sqrt{a}$ をかけて、

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

とすることで確認できる。

さて、$\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{10}\quad\sqrt{10}}_{(\sqrt{10})^2=10}}\times\sqrt{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ となることを利用すれば、

$$\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{3.162277660\cdots}{10}=\boxed{0.3162277660}\cdots$$

となり、（電卓も不要で）小数第 10 位まで正確に求まる。

(3)　やはり、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{1.414213562\cdots}=1\div 1.414213562\cdots$ の計算はしたくないし、小数第 9 位に誤差が入ってくる可能性がある。

(1)と同様にして $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{2}\quad\sqrt{2}}_{(\sqrt{2})^2=2}}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となることを利用すれば、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.414213562\cdots}{2}=0.707106781\cdots$$

となり、$\boxed{\text{小数第 9 位まで}}$は正確に求められる。

問3.2

(1) $$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\underbrace{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}}_{(\sqrt{7})^2=7}=\boxed{\frac{\sqrt{42}}{7}}$$

(2) $$\frac{2}{\sqrt{5}}=\underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}_{(\sqrt{5})^2=5}=\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

(3) $$\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}_{(\sqrt{5})^2=5}=\boxed{\frac{\sqrt{10}}{5}}$$

(4) $$\frac{6}{\sqrt{3}}=\underbrace{\frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}_{(\sqrt{3})^2=3}=\frac{{}^{2}\cancel{6}\sqrt{3}}{{}_{1}\cancel{3}}=\boxed{2\sqrt{3}}$$

(5) $$\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{12}}=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}_{2\times(\sqrt{3})^2=2\times3=6}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

(6) $$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{4\times6}}{\sqrt{6}}=\frac{2\cancel{\sqrt{6}}^{1}}{\cancel{\sqrt{6}}_{1}}=\boxed{2}$$

(別解) $$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{\cancel{24}^{4}}{\cancel{6}_{1}}}=\sqrt{4}=\boxed{2}$$

問3.3

(1) $\sqrt{\dfrac{12}{5}}=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{15}}{5}}$

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{27}}=\dfrac{1}{\sqrt{27}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{9}}$

(3) $\dfrac{6}{\sqrt{8}}=\dfrac{{}^{3}\cancel{6}}{{}_{1}\cancel{2}\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\boxed{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$

(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\times\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\dfrac{{}^{1}\cancel{3}\sqrt{2}}{{}_{2}\cancel{6}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

(別解) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

(5) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\times\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\dfrac{{}^{1}\cancel{2}\sqrt{6}}{{}_{3}\cancel{6}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(6) $\dfrac{\sqrt{1200}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\dfrac{\cancel{1200}^{100}}{\cancel{12}_{1}}}=\sqrt{100}=\boxed{10}$

問3.4

(1)
$$
\begin{aligned}
\frac{5}{\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{24}}{4} &= \frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{6}}{4} \\
&= \frac{5}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{{}^{1}\cancel{2}\sqrt{6}}{{}_{2}\cancel{4}} \\
&= \frac{5\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2} \\
&= \frac{5\sqrt{6}+2\sqrt{6}-3\sqrt{6}}{6} \\
&= \frac{(5+2-3)\sqrt{6}}{6} \\
&= \frac{{}^{2}\cancel{4}\sqrt{6}}{{}_{3}\cancel{6}} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}} &= \frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{3} \\
&= \frac{9\sqrt{2}-2\left(\sqrt{6}-3\sqrt{2}\right)}{6} \\
&= \frac{9\sqrt{2}-2\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{6} = \boxed{\frac{15\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{6}}
\end{aligned}
$$

問3.5

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}\,x-3 &= \sqrt{18}\,x+5 \\
\sqrt{2}\,x-3 &= 3\sqrt{2}\,x+5 \\
\sqrt{2}\,x-3\sqrt{2}\,x &= 5+3 \\
-2\sqrt{2}\,x &= 8 \\
x &= -\cancel{8}^{4}\times\frac{1}{{}_{1}\cancel{2}\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{{}^{2}\cancel{4}\sqrt{2}}{{}^{1}\cancel{2}}
\end{aligned}
$$

よって、$\boxed{x=-2\sqrt{2}}$

問3.6

(1) 長さ L m の振り子の周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ 秒なので、これが 2 秒となるのは、

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \frac{1}{\pi} = \sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \frac{1}{\pi^2} = \frac{L}{g} \qquad \therefore L = \frac{g}{\pi^2}$$

のときである。これを計算すると、

$$L = \frac{g}{\pi^2} \approx \frac{9.8}{3.14^2} = 0.99\cdots$$

なので、長さ L は約 $\boxed{1\,\mathrm{m}}$ である。

(2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = \underbrace{2\pi\sqrt{\dfrac{1}{g}}}_{\text{定数}} \times \sqrt{l}$ なので、周期 T は $\sqrt{l}$ に比例する。したがって、長さ l を

L から $\dfrac{L}{2}$ にすると、周期は $\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ 倍になる。

問3.7

問 3.6 でみたように、振り子の長さが約 1m のときの周期は 2 秒である。
また、周期 T は振り子の長さ l の平方根 $\sqrt{l}$ に比例するので、周期が 12 秒、すなわち、周期 2 秒の $6(=\sqrt{36})$ 倍になるのは、振り子の長さが 36 倍になるときである。
よって、ハイジのブランコのロープの長さは、約 36m となり、最も近いのは $\boxed{(5)}$