中2数学B 2020年度春期講習 本問解答
§4 ピタゴラスの定理の応用

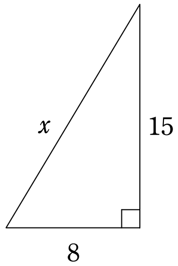
※ 欠席してしまった場合は、問 4.1～問 4.4 を（余裕があれば問 4.5, 問 4.6 も）自分で確認し、p.28 の宿題 H4.1～H4.3 に取り組んで提出してください。

問4.1

(1) ピタゴラスの定理より、

$$x^2 = 8^2 + 15^2$$
$$= 64 + 225 = 289 = 17^2$$

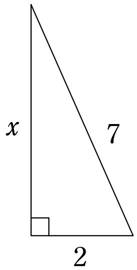
よって、$x > 0$ より、$x = \boxed{17}$



(2) ピタゴラスの定理より、

$$x^2 + 2^2 = 7^2$$
$$x^2 = 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45\left[= 3^2 \times 5\right]$$

よって、$x > 0$ より、$x = \boxed{3\sqrt{5}}$



問4.2

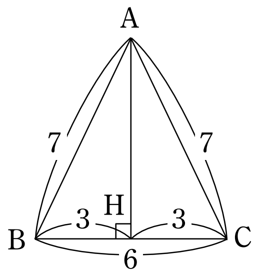
(1) $\triangle$ABC は AB = AC の二等辺三角形なので、A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、BH = CH = 3 となる。

$\triangle$ABH にピタゴラスの定理を用いて、

$$7^2 = 3^2 + \mathrm{AH}^2$$
$$\mathrm{AH}^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40,$$
$$\therefore \mathrm{AH} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad (\mathrm{AH} > 0 \text{ より})$$

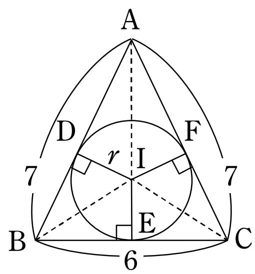
したがって、

$$S = \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AH} = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{10} = \boxed{6\sqrt{10}}$$



内接円の中心（内心）を I とし、内接円と辺 AB, BC, CA との接点をそれぞれ D, E, F とすると、内接円の半径 ID, IE, IF は辺 AB, BC, CA と垂直になる。したがって、内接円の半径を r とすると、$\triangle$ABC の面積は、

$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{IAB} + \triangle\mathrm{IBC} + \triangle\mathrm{ICA}$$
$$= \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{ID} + \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{IE} + \frac{1}{2} \times \mathrm{CA} \times \mathrm{IF}$$
$$= \frac{7r}{2} + \frac{6r}{2} + \frac{7r}{2} = \frac{(7+6+7)r}{2} = \frac{20r}{2} = 10r$$

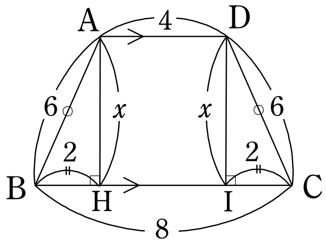


と表せる。よって、

$$10r = 6\sqrt{10}$$

$$\therefore r = 6\sqrt{10} \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{5}}$$

(2) 点 A, D から底辺 BC に下した垂線の足を それぞれ H, I とし、AH=x とおく。



△ABH≡△DCI（斜辺一辺相等）より BH=CI なので、

BH=CI=$\frac{\mathrm{BC}-\mathrm{HI}}{2} = \frac{8-4}{2} = 2$ となる。

△ABHにピタゴラスの定理を用いて、

$x^2 + 2^2 = 6^2$

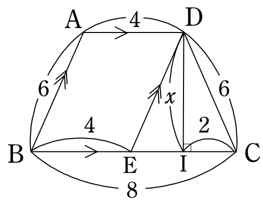
$x^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$

$x > 0$より、$x = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$

よって、$S = \frac{1}{2} \times (\mathrm{AD}+\mathrm{BC}) \times \mathrm{AH}$

$= \frac{1}{2} \times (4+8) \times 4\sqrt{2} = \boxed{24\sqrt{2}}$

（別方針） 右図のように、D から AB に平行な直線を引いて考える方法もある。



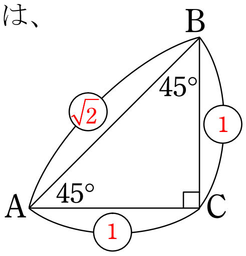
問4.3

$AC=BC=1$ の直角二等辺三角形 ABC の斜辺 AB の長さは、
ピタゴラスの定理より、

$$AB^2=AC^2+BC^2=1+1=2$$

$\therefore AB=\sqrt{2}$ （$AB>0$ なので）

となり、3 辺の長さは右図のようになる。
すべての直角二等辺三角形は△ABC と相似なので、
3 辺の長さの比は右図の△ABC と同じになり、
$1:1:\sqrt{2}$ である。



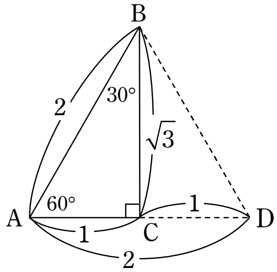
$\angle A=60°, \angle B=30°, \angle C=90°$ で、 $AB=2$ の直角三角形 ABC は、
正三角形 ABD の半分になっていて、 $AC=CD=1$ である。
△ABC にピタゴラスの定理を用いて、

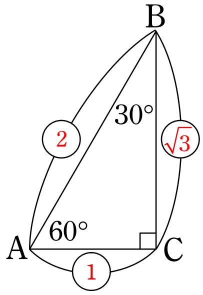
$$AB^2=AC^2+BC^2$$

$$2^2=1^2+BC^2 \qquad BC^2=4-1=3$$

$\therefore BC=\sqrt{3}$ （$BC>0$ より）

となり、3 辺の長さは右図のようになる。
$30°, 60°, 90°$ の三角定規の形の直角三角形は、
すべて△ABC と相似なので、
3 辺の長さの比は右図の△ABC と同じになり、
$1:\sqrt{3}:2$ である。





問4.4

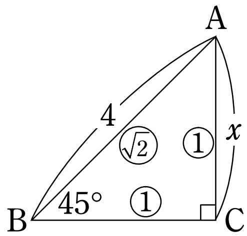
(1) △ABC は直角二等辺三角形なので、3 辺の比は

$$AC:BC:AB=1:1:\sqrt{2}$$

である。

よって、 $4:x=\sqrt{2}:1$ より、

$$x=4\times\frac{1}{\sqrt{2}}={}^{2}\cancel{4}\times\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_1}=\boxed{2\sqrt{2}}$$

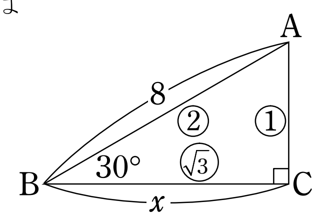


(2) △ABC は $30°, 60°, 90°$ の直角三角形なので、3 辺の比は

$$AC:BC:AB=1:\sqrt{3}:2$$

である。

よって、 $8:x=2:\sqrt{3}$ より、 $x={}^{4}\cancel{8}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_1}=\boxed{4\sqrt{3}}$

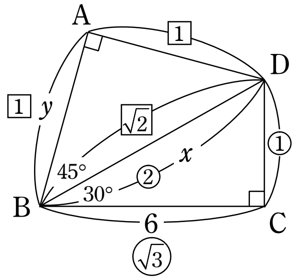


(3)　△BDC は 30°, 60°, 90° の直角三角形なので、3 辺の比は

$$\mathrm{CD}:\mathrm{BC}:\mathrm{BD}=1:\sqrt{3}:2$$

である。

よって、 $6:x=\sqrt{3}:2$ より、$x=6\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\overset{2}{\cancel{6}}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{3}}}=\boxed{4\sqrt{3}}$



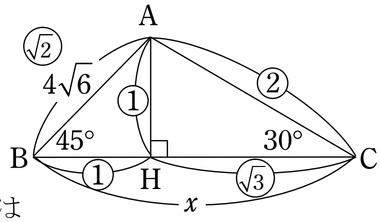
次に、△ABD は直角二等辺三角形なので、3 辺の比は

$$\mathrm{BA}:\mathrm{AD}:\mathrm{BD}=1:1:\sqrt{2}$$

である。

よって、 $x:y=\sqrt{2}:1$ より、$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x=\dfrac{\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\times\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3}=\boxed{2\sqrt{6}}$

(4)　A から BC に下した垂線の足を H とする。



△ABH は直角二等辺三角形なので、3 辺の比は

$$\mathrm{AH}:\mathrm{BH}:\mathrm{AB}=1:1:\sqrt{2}$$

また、

△ACH は 30°, 60°, 90° の直角三角形なので、3 辺の比は

$$\mathrm{AC}:\mathrm{AH}:\mathrm{HC}=2:1:\sqrt{3}$$

となっている。よって、

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathrm{AB}:(\mathrm{BH}+\mathrm{HC})=\sqrt{2}:\left(1+\sqrt{3}\right)$$

なので、

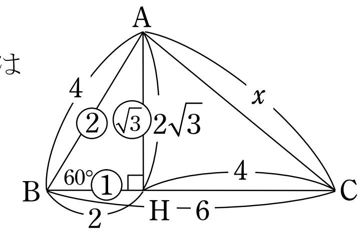
$$x=\mathrm{BC}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\mathrm{AB}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{2}}}}\times4\overset{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{6}}}\qquad\left(\because\sqrt{6}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right)$$

$$=\left(1+\sqrt{3}\right)\times4\sqrt{3}$$

$$=\boxed{4\sqrt{3}+12}$$

(5)　A から BC に下した垂線の足を H とすると、
△ABH は $30°, 60°, 90°$ の直角三角形なので、3 辺の比は



$$AB : BH : HA = 2 : 1 : \sqrt{3}$$

よって、 $AB = 4$ より、

$$BH = AB \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$AH = BH \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$CH = BC - BH = 6 - 2 = 4$$

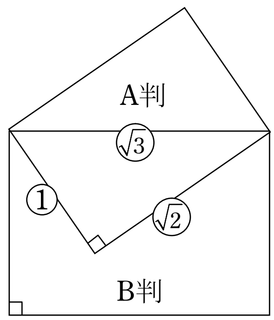
と求まる。
すると、△ACH にピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2 = AC^2 = 4^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16 + 12 = 28$$

よって、 $x > 0$ より、 $x = \sqrt{28} = \boxed{2\sqrt{7}}$

問4.5

(1)　A4 判の対角線の長さと B4 判の長い方の辺の長さが同じになる。

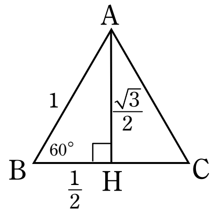


(2)　(1)で述べた関係は、A0 判と B0 判についても同じである。また、問 1.11 でみたように、コピー用紙の長い方の辺と短い方の辺の比は $\sqrt{2} : 1$（これは A 判でも B 判でも同様）である。
よって、A0 判の短い方の辺を x とおくと、長い方の辺は $\sqrt{2}\,x$ で、右図の A 判, B 判の重なりの直角三角形にピタゴラスの定理を用いれば、B0 判の長い方の辺は

$$\sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2}\,x\right)^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}\,x$$

となる。したがって、A0 判と B0 判の相似比は $\sqrt{2}\,x : \sqrt{3}\,x = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ である。
これより面積比は $2 : 3$ と分かるから、B0 判の面積は A0 判の面積の 1.5 倍で、$\boxed{1.5\,\mathrm{m}^2}$ である。

問4.6



1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC において、
A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、

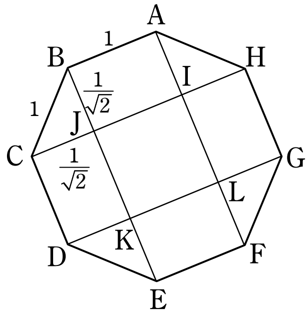
$$\mathrm{AH}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ となり、

求める面積は、

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

これを小数第 2 位まで求めると、$\sqrt{3}=1.732\cdots$ なので、

$$\frac{1.732\cdots}{4}=\boxed{0.43}\cdots$$



1 辺の長さが 1 の正八角形 ABCDEFGH は、
右図のように対角線の交点を I,J,K,L とおくと、
直角二等辺三角形 BCJ が 4 つ分と、長方形 ABJI が 4 つ分と、正方形 IJKL が 1 つ分に分けられる。
よって、

$$4\times\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}\right\}+4\times\left(1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1^2$$

$$=1+2\sqrt{2}+1=2+2\sqrt{2}$$

これを小数第 2 位まで求めると、$\sqrt{2}=1.414\cdots$ なので、

$$2+2\times1.414\cdots=\boxed{4.82}\cdots$$